

Zkouška VPL - písemná část

15. ledna 2019

1. Předpokládejme, že každý člověk je buď pravdomluvný nebo lhář. Pravdomluvní vždy říká pravdu a lháři vždy lžou. Pokud řekneme, že dva lidi jsou stejní, znamená to, že jsou oba lháři, nebo oba pravdomluvní. Potkáme tři lidi – Adama, Boženu a Cecila:

- (i) Adam říká: “Božena lže”
- (ii) Božena říká: “Adam a Cecil jsou oba stejní.”

Nechť prvovýroky a, b, c reprezentují, že Adam (resp. Božena, Cecil) jsou pravdomluvní. Označme $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$.

- (a) Napište výroky φ_1, φ_2 ve tvaru ekvivalence vyjadřující (i) a (ii), oba nad množinou prvovýroků \mathbb{P} . (2b)
 - (b) Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Tablo metodou dokažte, že $T \vdash \neg c$ (4b).
 - (c) Uveďte příklad výroku nad \mathbb{P} , který je v teorii T nezávislý, anebo zdůvodněte, že takový výrok neexistuje. (2b).
 - (d) Naleznete teorii S nad $\{a, b\}$ takovou, že T je konzervativní extenze S . (2b)
2. Nechť $T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)\}$ je teorie jazyka $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, a označme φ formuli $R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x) \rightarrow x = y$.
 - (a) Naleznete otevřenou teorii S (případně ve větším jazyce) s axiomu v CNF, která je nesplnitelná, právě když $T \models \varphi$. Napište S v množinové reprezentaci. (2b)
 - (b) Rezolucí zamítněte S . Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. (Nápověda: axiomu rovnosti nejsou třeba.) (4b)
 - (c) Naleznete konečnou konjunkci základních instancí axiomů teorie S , která je nesplnitelná. (2b)
 - (d) Je $S \vdash_{LI} \square$? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.
 - (a) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$, kde $S(r) = r + 1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Právě pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v \mathcal{R} z parametru 0? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω -kategorická teorie? Je T' kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)