Zkouška VPL - písemná část

21. ledna 2019

1. Nechť $T = \{p,\ \neg p \to \neg q \wedge \neg s,\ q \leftrightarrow \neg r,\ r \to \neg s\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.
   (a) Pomocí implikačního grafu ukažte, že T je splnitelná. *(2b)*
   (b) Určete všechny modely teorie T a axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Tablo metodou dokažte, že $T \models s \to p \wedge q$. *(3b)*
   (d) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních teorií T' nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ takových, že teorie T je extenzí T'. Kolik z nich je kompletních? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Víme, že:
   (i) Marcus je člověk.
   (ii) Marcus je Říman.
   (iii) César je vládce.
   (iv) Všichni Římané jsou k Césarovi loajální nebo ho nesnáší (nebo oboje).
   (v) Každý je k někomu loajální.
   (vi) Lidé se snaží zabít pouze vládce, ke kterým nejsou loajální.
   (vii) Marcus se pokusil zabít Césara.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   ($viii$) Marcus nesnáší Césara.

   Konkrétně:

   (a) Tvrzení (i) až ($viii$) vyjádřete sentencemi φ_1 až φ_8 jazyka $L = \langle C, R, V, L, N, Z, m, c\rangle$ bez rovnosti, kde C, R, V jsou unární relační symboly a $C(x)$, $R(x)$, $V(x)$ značí (po řadě), že "x je člověk","x je Říman", "x je vládce", L, N, Z jsou binární relační symboly a $L(x, y)$, $N(x, y)$ a $Z(x, y)$ po řadě značí, že "x je loajální k y", "x nesnáší y" a "x se pokusil zabít y" a m a c jsou konstantní symboly označující Marcuse a Césara. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_7\} \models \varphi_8$. Převeďte T do množinové reprezentace. *(2b)*
   (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(3b)*
   (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie T, která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte předchozí krok. (2b).*
   (e) Je $T \vdash_{LI} \square$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2 \vee x = y_3),\ \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
   (a) Určete izomorfní spektrum $I(T, \kappa)$ teorie T pro spočetné κ (konečné i nekonečné). *(2b)*
   (b) Je T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2 \vee x = y_3)\}$ jazyka $L' = \langle\rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*