Zkouška VPL - písemná část

23. ledna 2019

1. Buď $n \geq 1$ přirozené číslo a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ (množina vrcholů). Nechť prvovýrok e_{ij} reprezentuje, že *"mezi vrcholy i a j je hrana"* a $\mathbb{P} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Tedy libovolný graf $G = (V, E)$ chápeme též jako ohodnocení $v \colon \mathbb{P} \to \{0, 1\}$, v němž $v(e_{ij}) = 1$ právě když $(i, j) \in E$. Nechť dále T je kompletní teorie nad $\mathbb{P}$, která má za model nějaký konkrétní *jednoduchý neorientovaný* graf.

   (a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \neg e_{ii}, \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n} e_{ij} \leftrightarrow e_{ji}\}$? Je T konzervativní extenzí S? Odpovědi zdůvodněte. *(2b)*

   (b) Nechť prvovýroky a_i reprezentují, že vrchol i leží v nějaké množině A, tj. strukturu (V, E, A) ztotožňujeme s ohodnocením v prvovýroků $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, v němž navíc $v(a_i) = 1$ právě když $i \in A$. Napište výrok φ nad $\mathbb{P}'$ vyjadřující, že *"A je dominující množina v $G = (V, E)$"*. (Množina $A \subseteq V$ je *dominující* v grafu $G = (V, E)$, pokud každý vrchol, který není v A, má nějakého souseda v A.) *(2b)*

   (c) Nechť nyní $n = 5$ a $G = (V, E)$ je úplný bipartitní graf $K_{2,3}$ s bipartitními třídami $\{1, 2\}$ a $\{3, 4, 5\}$. Zvolte si (vhodně) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ tak, aby měla za model G, a převeďte $T' = T \cup \{\varphi\}$ do množinové reprezentace. *(2b)*

   (d) Rezolucí ukažte, že $T' \models (\neg a_1 \wedge \neg a_2) \to (a_3 \wedge a_4 \wedge a_5)$, tj. pokud v dominující množině není žádný vrchol z menší třídy, jsou v ní všechny vrcholy z větší třídy. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)(\neg P(x) \to Q(x)),\ (\exists x)(R(x) \to \neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\exists x)(R(x) \to P(x))$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(4b)*

   (b) Z bezesporné větve předchozího tabla sestrojte model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí. *(2b)*

   (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y) S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

   (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(P(x)) = x$. *(2b)*

   (b) Buď $\mathcal{Z}_k = \langle \mathbb{Z}, F_k \rangle$ struktura jazyka L, kde $0 < k \in \mathbb{N}$ a $F_k(m) = m + k$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Nalezněte expanzi $\mathcal{Z}'_k$ struktury $\mathcal{Z}_k$ do jazyka $L' = \langle S, P \rangle$ takovou, že $\mathcal{Z}'_k \models T'$. Kolik mají struktury $\mathcal{Z}_k$ a $\mathcal{Z}'_k$ podstruktur? *(2b)*

   (c) Jsou teorie T a T' ω-kategorické? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*