Zkouška VPL - písemná část

29. ledna 2019

1. Nechť $T = \{p \rightarrow (\neg q \rightarrow r),\ q \rightarrow p \vee \neg r\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Tablo metodou nalezněte všechny modely teorie T. *(3b)*
   (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Je teorie T extenzí teorie $S = \{q \leftrightarrow r\}$ nad $\{q, r\}$? Je T konzervativní extenzí S? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou pravdivé či lživé v $T \cup S$. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Honza chová tři druhy zvířat (morče, potkana, tchoře) v řadě klecí, mezi nimiž má jednu zlatou, jednu stříbrnou, a jednu bronzovou klec. Víme, že
   (i) V každé kleci je jedno zvíře (z uvedených tří druhů).
   (ii) Stříbrná klec stojí napravo od všech klecí s morčaty.
   (iii) Potkani jsou pouze v klecích napravo od stříbrné klece.
   (iv) Uspořádání klecí je ostré lineární uspořádání.
   (v) Zlatá, stříbrná, bronzová jsou navzájem různé klece.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   (vi) Ve stříbrné kleci je tchoř.

   Konkrétně:

   (a) Tvrzení (i) až (vi) vyjádřete <u>sentencemi</u> φ_1 až φ_6 jazyka $L = \langle <, M, P, T, z, s, b\rangle$ s rovností, kde $<$ je binární relační symbol a $x < y$ značí, že "klec x je nalevo od klece y", M, P, T jsou unární relační symboly a $M(x)$, $P(x)$, $T(x)$ značí (resp.), že "v kleci x je morče, potkan, tchoř", a z, s, b jsou konstantní symboly označující (resp.) zlatou, stříbrnou, bronzovou klec. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_5\} \models \varphi_6$. Převeďte T do množinové reprezentace. *(2b)*
   (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: z (iv) stačí pouze ireflexivita, axiomy rovnosti nejsou třeba. (3b)*
   (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie T, která je nesplnitelná. *(2b).*
   (e) Označme $S = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_5\}$ a $S' = S \cup \{z < b\}$. Je S' konzervativní extenze teorie S? Je S' kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T = \{R(x, x), R(x, y) \rightarrow R(y, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle R\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 4 prvky".
   (a) Určete izomorfní spektrum teorie T. *(2b)*
   (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*
   (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*