

Zkouška VPL - písemná část

1. února 2019

1. Byla vykradena banka. Vyšetřovatelé zatkli tři podezřelé – Augustýna, Božidara a Ctirada. Podezřelí vypovídali takto:
 - (i) Augustýn: “Já jsem to nebyl, banku vykradli Božidar nebo Ctirad.”
 - (ii) Božidar: “Ctirad by to sám nezvládl, pokud to udělal, musel mu pomoci Augustýn.”
 - (iii) Ctirad: “Augustýn a Božidar vždy pracují společně.”
 - (a) Zapište tvrzení podezřelých z (i)-(iii) jako výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, kde a, b, c mají (po řadě) význam “Augustýn (Božidar, Ctirad) je vinen”. (2b)
 - (b) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda jsou výroky zadržených konzistentní (tj. zda je konjunkce výroků $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ splnitelná). (2b)
 - (c) Dalším vyšetřováním bylo zjištěno, že Augustýn ve výpovědi lhal a Božidar a Ctirad vypovídali pravdivě. Navíc bylo zjištěno, že Božidar a Ctirad se nemají rádi a nikdy by nepracovali společně (tj. alespoň jeden z nich je nevinný). Zapište všechny zjištěné informace jako teorii T nad \mathbb{P} a pomocí tablo metody dokažte, že Ctirad je nevinný. (4b)
 - (d) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T , nebo zdůvodněte, proč neexistují. (2b)
2. Nechť $T = \{(\forall x)(\exists y)P(x, y), (\forall u)(\forall v)(\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow R(u, v)), (\exists x)\neg R(x, x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou binární relační symboly.
 - (a) Skolemizací nalezněte k T ekvivalentní otevřenou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem). (2b)
 - (b) Pomocí rezoluce dokažte, že T' je nesplnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. (4b)
 - (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (b).* (2b)
 - (d) Je sentence $(\exists x)R(x, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 3. Nechť T je extenze teorie $DeLO^\pm$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a s maximálním prvkem) o nový axiom $c \leq d \wedge c \neq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d \rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.
 - (a) Je teorie $T' = T \cup \{(\forall x)(c \leq x)\}$ konzervativní extenze teorie T ? Je T' kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Určete $I(T, \omega)$, tj. počet navzájem neizomorfních spočetných modelů teorie T . (2b)
 - (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)