Zkouška VPL - písemná část

8. února 2019

1. Nechť prvovýroky n, m, p reprezentují (po řadě), že *"lidé nosí deštníky"*, *"meteorologové hlásí déšť"*, *"prší"* a označme $\mathbb{P} = \{n, m, p\}$. Víme, že

   (i) *Neprší-li, lidé nenosí deštníky.*

   (ii) *Hlásí-li meteorologové déšť, lidé nosí deštníky.*

   (iii) *Nehlásí-li meteorologové déšť, prší.*

   (a) Napište výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad $\mathbb{P}$ vyjadřující po řadě (i), (ii), (iii) a pomocí implikačního grafu ukažte, že teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je bezesporná. *(3b)*

   (b) Rezolucí dokažte, že z T vyplývá, že *prší. (3b)*

   (c) Určete množinu $M^{\mathbb{P}}(T)$ všech modelů teorie T nad $\mathbb{P}$. *(2b)*

   (d) Kolik je výroků nad $\mathbb{P}$ navzájem neekvivalentních v teorii T, které jsou (logicky) nezávislé? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\exists y)(P(y) \to P(x))\}$ je teorie v jazyce $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde P je unární relační symbol.

   (a) Nalezněte otevřenou konzervativní extenzi T' teorie T v jazyce L' rozšířeném pouze o unární funkční symbol f. *(2b)*

   (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie T' s položkou $F(\forall x)P(x)$ v kořeni. *(4b)*

   (c) Z nějaké bezesporné větve předchozího tabla sestrojte kanonický model. *(2b)*

   (d) Je formule $(\forall x)P(x)$ pravdivá, lživá, či nezávislá v teoriích T a T'? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, obsahující následující axiomy.

$$R(x, x)$$
$$R(x, y) \ \wedge \ R(y, x) \ \to \ x = y$$
$$R(x, y) \ \wedge \ R(y, z) \ \to \ R(x, z)$$
$$R(x, y) \ \vee \ R(y, x)$$
$$(\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge (\forall z)(R(x, z) \wedge R(z, y)))$$
$$R(x, y) \wedge x \neq y \ \to \ (\exists z)(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge x \neq z \wedge z \neq y)$$

   (a) Pomocí skolemizace posledních dvou axiomů nalezněte ekvisplnitelnou otevřenou extenzi T' teorie T (ve vhodně rozšířeném jazyce L'). *(2b)*

   (b) Nechť $\mathcal{A}$ je struktura jazyka L na intervalu reálných čísel $\langle 0, 1 \rangle$ se standardním uspořádáním. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' tak, aby $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

   (c) Jsou teorie T a T' kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*