Zkouška VPL - písemná část

12. února 2019

1. Nechť $T = \{(p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow q,\ p \wedge \neg q \rightarrow \neg r\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie T. *(3b)*
   (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Je T extenzí teorie $S = \{p \rightarrow q\}$ nad $\{p, q\}$? Je T konzervativní extenzí S? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Určete, kolik je navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v S nebo T. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Známe následující informace o zadávání zakázek:
   (i) Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.
   (ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.
   (iii) Pan Lubor je úředník.
   (iv) Nějaká společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

   Pomocí rezoluce dokažte, že

   (v) Pan Lubor je kriminálník.

   Konkrétně:

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l\rangle$ bez rovnosti, kde U, Z, S a K jsou unární relační symboly a $U(x), Z(x), S(x), K(x)$ znamenají (po řadě) "x je úředník / zakázka / společnost / kriminálník", P, V, O jsou binární relační symboly, kde $P(x, y), V(x, y), O(x, y)$ značí (po řadě) "x podplatil y", "x vyhrál y" a "x je odpovědný za y" a l je konstanta označující pana Lubora. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$. *(2b)*
   (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(3b)*
   (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná. *(2b)*

3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle f, g, a\rangle$ s rovností, kde f, g, a jsou (po řadě) binární, unární a nulární funkční symboly, s následujícími axiomy

$$\begin{aligned} f(x, f(y, z)) &= f(f(x, y), z), \\ f(a, x) = x \quad &\wedge \quad f(x, a) = x, \\ f(x, g(x)) = a \quad &\wedge \quad f(g(x), x) = a. \end{aligned}$$

   (a) Je $(\forall x)(\forall y) f(x, y) = f(y, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T? Zdůvodněte. *(2b)*
   (b) Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}}_6 = \langle\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +, -, 0\rangle$ jazyka L, kde $+$, $-$ jsou standardní sčítání a (unární) mínus modulo 6. Je teorie $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Z}}_6)$, tj. teorie struktury $\underline{\mathbb{Z}}_6$, jednoduchá extenze teorie T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (c) Nalezněte všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}_6$. Jsou všechny modelem teorie T? Zdůvodněte. *(2b)*