Výroková a predikátová logika - II

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2019/2020

Univerzálnost spojek

Jazyk výrokové logiky obsahuje *základní* spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Můžeme zavést obecně n-ární spojku pro libovolnou Booleovu funkci. Např.

$p \downarrow q$ *"ani p ani q"* (NOR, Peirceova spojka)

$p \uparrow q$ *"ne (p a q)"* (NAND, Shefferova spojka)

Množina spojek je *univerzální*, pokud lze každou Booleovskou funkci reprezentovat nějakým z nich (dobře) vytvořeným výrokem.

Tvrzení $\{\neg , \wedge , \vee\}$ *je univerzální.*

Důkaz Funkci $f\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ reprezentuje výrok $\bigvee_{v\in f^{-1}[1]} \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{v_i}$, kde $p_i^{v_i}$ značí prvovýrok p_i pokud $v_i = 1$, jinak výrok $\neg p_i$. Pro $f^{-1}[1] = \emptyset$ zvolíme výrok $\perp$. $\square$

Tvrzení $\{\neg , \rightarrow\}$ *je univerzální.*

Důkaz $(p \wedge q) \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$, $(p \vee q) \sim (\neg p \rightarrow q)$. $\square$

CNF a DNF

- *Literál* je prvovýrok nebo jeho negace. Je-li p prvovýrok, označme p^0 literál $\neg p$ a p^1 literál p. Je-li l literál, označme $\bar{l}$ literál *opačný* k l.
- *Klauzule* je disjunkce literálů, prázdnou klauzulí rozumíme $\perp$.
- Výrok je v *konjunktivně normálním tvaru* (*CNF*), je-li konjunkcí klauzulí. Prázdným výrokem v CNF rozumíme $\top$.
- *Elementární konjunkce* je konjunkce literálů, prázdnou konjunkcí je $\top$.
- Výrok je v *disjunktivně normálním tvaru* (*DNF*), je-li disjunkcí elementárních konjunkcí. Prázdným výrokem v DNF rozumíme $\perp$.

Poznámka Klauzule nebo elementární konjunkce je zároveň v CNF i DNF.

Pozorování *Výrok v CNF je pravdivý, právě když každá jeho klauzule obsahuje dvojici opačných literálů. Výrok v DNF je splnitelný, právě když aspoň jedna jeho elementární konjunkce neobsahuje dvojici opačných literálů.*

Převod tabulkou

Tvrzení *Nechť* $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ *pro* $\mathbb{P}$ *konečné. Označme* $\overline{K} = {}^{\mathbb{P}}2 \setminus K$*. Pak*

$$M^{\mathbb{P}}\Big(\bigvee_{v\in K}\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} p^{v(p)}\Big) = K = M^{\mathbb{P}}\Big(\bigwedge_{v\in\overline{K}}\bigvee_{p\in\mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}\Big)$$

Důkaz První rovnost plyne z $\overline{w}(\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} p^{v(p)}) = 1$ právě když $w = v$, kde $w \in {}^{\mathbb{P}}2$. Druhá obdobně z $\overline{w}(\bigvee_{p\in\mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}) = 1$ právě když $w \neq v$. □

Např. $K = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ namodelujeme

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \sim$$
$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Důsledek *Každý výrok je ekvivalentní nějakému výroku v CNF/DNF.*

Důkaz Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných, kterých je konečně. Lze tedy použít tvrzení pro $K = M^{\mathbb{P}}(\varphi)$ a $\mathbb{P} = \mathrm{var}(\varphi)$. □

Převod úpravami

Tvrzení *Nechť φ' je výrok vzniklý z výroku φ nahrazením některých výskytů podvýroku ψ za výrok ψ'. Jestliže $\psi \sim \psi'$, pak $\varphi \sim \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

(1) $(\varphi \rightarrow \psi) \sim (\neg\varphi \vee \psi)$, $\quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \sim ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi))$

(2) $\neg\neg\varphi \sim \varphi$, $\quad \neg(\varphi \wedge \psi) \sim (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\quad \neg(\varphi \vee \psi) \sim (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(3) $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\psi \wedge \chi) \vee \varphi) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(3)' $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\psi \vee \chi) \wedge \varphi) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

Tvrzení *Každý výrok lze pomocí $(1), (2), (3)/(3)'$ převést na CNF / DNF.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Tvrzení *Nechť výrok φ obsahuje pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou $\wedge$ a $\vee$ a znegováním všech literálů platí $\neg\varphi \sim \varphi^*$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Problém splnitelnosti a řešiče

- Problém SAT: Je daná výroková formule splnitelná?
- *Příklad Lze šachovnici bez dvou protilehlých rohů* perfektně *pokrýt kostkami domina?*

  Snadno vytvoříme výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když to lze. Pak ji můžeme zkusit ověřit pomocí nějakého SAT řešiče.
- Nejlepší řešiče pro SAT: `www.satcompetition.org`.
- Řešič v ukázce: `Glucose`, formát pro CNF soubory: `DIMACS`.
- Obecnější otázka: *Lze celou matematiku převést do logických formulí?*
  AI, strojové dokazování, Peano: *Formulario* (1895-1908), Mizar system
- *Proč to lidé (většinou) nedělají?*
  Jak vyřešíme uvedený příklad *elegantněji*? V čem náš postup spočívá?

2-SAT

- Výrok je v *k-CNF*, je-li v CNF a každá jeho klauzule má nejvýše k literálů.
- *k-SAT* je následující problém (pro pevné $k > 0$)

  INSTANCE: *Výrok φ v k-CNF.*

  OTÁZKA: *Je φ splnitelný?*

Zatímco už pro $k = 3$ jde o NP-úplný problém, ukážeme, že 2-SAT lze řešit v *lineárním* čase (vzhledem k délce φ).

Vynecháme implementační detaily (výpočetní model, reprezentace v paměti) a využijeme následující znalosti, viz [ADS I].

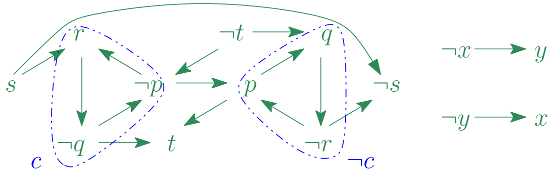
Tvrzení *Rozklad orientovaného grafu (V, E) na silně souvislé komponenty lze nalézt v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

- Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u a v existují v G orientované cesty jak z u do v, tak i z v do u.
- Silně souvislá *komponenta* grafu G je maximální silně souvislý podgraf G.

Implikační graf

Implikační graf výroku φ v 2-CNF je orientovaný graf G_φ, v němž

- vrcholy jsou proměnné výroku φ nebo jejich negace,
- klauzuli $l_1 \vee l_2$ výroku φ reprezentujeme dvojicí hran $\overline{l_1} \to l_2$, $\overline{l_2} \to l_1$,
- klauzuli l_1 výroku φ reprezentujeme hranou $\overline{l_1} \to l_1$.



$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (q \vee t) \wedge \neg s \wedge (x \vee y)$$

Tvrzení *φ je splnitelný, právě když žádná silně souvislá komponenta v G_φ neobsahuje dvojici opačných literálů.*

Důkaz Každé splňující ohodnocení ohodnotí všechny literály ze stejné komponenty stejně. Implikace zleva doprava tedy platí.

Nalezení ohodnocení

Naopak, označme G^*_φ graf vzniklý z G_φ kontrakcí silně souvislých komponent.

Pozorování *G^*_φ je acyklický, má tedy topologické uspořádání $<$.*

- Orientovaný graf je *acyklický*, neobsahuje-li orientovaný *cyklus*.
- Lineární uspořádání $<$ vrcholů orientovaného grafu je *topologické*, pokud $p < q$ pro každou hranu z p do q.

Nyní pro každou komponentu v rostoucím pořadí dle $<$, nejsou-li její literály dosud ohodnocené, nastav je na 0 a literály v opačné komponentě na 1.

Zbývá ukázat, že takto získané ohodnocení v splňuje φ. Kdyby ne, existovaly by v G^*_φ hrany $p \to q$ a $\overline{q} \to \overline{p}$ s $v(p) = 1$ a $v(q) = 0$. To je ve sporu s pořadím nastavení komponent na 0 resp. 1, neboť $p < q$ a $\overline{q} < \overline{p}$. $\square$

Důsledek *2-SAT je řešitelný v lineárním čase.*