

# Výroková a predikátová logika - VII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2019/2020

# Platnost v teorii a logická platnost

- **Teorie** jazyka  $L$  je libovolná množina  $T$  formulí jazyka  $L$  (tzv. **axiomů**).
- **Model teorie**  $T$  je  $L$ -struktura  $\mathcal{A}$  taková, že  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro každé  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$ .
- **Třída modelů** teorie  $T$  je  $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$ .
- Formule  $\varphi$  je **pravdivá v  $T$**  (**platí v  $T$** ), značíme  $T \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro každý model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$ . V opačném případě píšeme  $T \not\models \varphi$ .
- Formule  $\varphi$  je **lživá v  $T$** , pokud  $T \models \neg\varphi$ , tj. je lživá v každém modelu  $T$ .
- Formule  $\varphi$  je **nezávislá v  $T$** , pokud není pravdivá v  $T$  ani lživá v  $T$ .
- Je-li  $T = \emptyset$ , je  $M(T) = M(L)$  a teorii  $T$  vynecháváme, případně říkáme “v logice”. Pak  $\models \varphi$  značí, že  $\varphi$  je **pravdivá** ((**logicky**) **platí**, **tautologie**).
- **Důsledek**  $T$  je množina  $\theta^L(T)$  všech **sentencí** jazyka  $L$  pravdivých v  $T$ , tj.
 
$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

# Nesplnitelnost a pravdivost

*Problém pravdivosti v teorii lze převést na problém existence modelu.*

**Tvrzení** Pro každou teorii  $T$  a *sentenci*  $\varphi$  (stejného jazyka)

$$T, \neg\varphi \text{ nemá model} \Leftrightarrow T \models \varphi.$$

**Důkaz** Z definic plynou ekvivalence následujících tvrzení.

- (1)  $T, \neg\varphi$  nemá model,
- (2)  $\neg\varphi$  neplatí v žádném modelu teorie  $T$ ,
- (3)  $\varphi$  platí v každém modelu teorie  $T$ ,
- (4)  $T \models \varphi$ .  $\square$

**Poznámka** Předpoklad, že  $\varphi$  je sentence, je nutný pro  $(2) \Rightarrow (3)$ .

*Např. teorie  $\{P(c), \neg P(x)\}$  nemá model, ale  $P(c) \not\models P(x)$ , kde  $P$  je unární relační symbol a  $c$  je konstantní symbol.*

# Základní algebraické teorie - příklady

- **Teorie grup** nad jazykem  $L = \langle +, -, 0 \rangle$  s rovností má axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{asociativita } +)$$

$$0 + x = x = x + 0 \quad (\text{neutralita } 0 \text{ k } +)$$

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x \quad (-x \text{ je inverzní prvek k } x)$$

- **Teorie komutativních grup** má navíc ax.  $x + y = y + x$  (komutativita  $+$ )

- **Teorie okruhů** je jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  s rovností, má navíc axiomy

$$1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad (\text{neutralita } 1 \text{ k } \cdot)$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\text{asociativita } \cdot)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (\text{distributivita } \cdot \text{ k } +)$$

- **Teorie komutativních okruhů** má navíc ax.  $x \cdot y = y \cdot x$  (komutativita  $\cdot$ )

- **Teorie těles** stejného jazyka má navíc axiomy

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1) \quad (\text{existence inverzního prvku k } \cdot)$$

$$0 \neq 1 \quad (\text{netrivialita})$$

# Vlastnosti teorií

Teorie  $T$  jazyka  $L$  je (*sémanticky*)

- *sporná*, jestliže v ní platí  $\perp$  (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá *sentence* je v ní pravdivá či lživá,
- *extenze* teorie  $T'$  jazyka  $L'$ , jestliže  $L' \subseteq L$  a  $\theta^{L'}(T') \subseteq \theta^L(T)$ ,  
o extenzi  $T$  teorie  $T'$  řekneme, že je *jednoduchá*, pokud  $L = L'$ , a  
*konzervativní*, pokud  $\theta^{L'}(T') = \theta^L(T) \cap \text{Fm}_{L'}$ ,
- *ekvivalentní* s teorií  $T'$ , jestliže  $T$  je extenzí  $T'$  a  $T'$  je extenzí  $T$ ,

Struktury  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  pro jazyk  $L$  jsou *elementárně ekvivalentní*, značeno  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , platí-li v nich stejné formule.

**Pozorování** Necht'  $T$  a  $T'$  jsou teorie jazyka  $L$ . Teorie  $T$  je (*sémanticky*)

- (1) *bezesporná*, právě když má model,
- (2) *kompletní*, právě když má až na *elementární ekvivalenci* jediný model,
- (3) *extenze*  $T'$ , právě když  $M(T) \subseteq M(T')$ ,
- (4) *ekvivalentní* s  $T'$ , právě když  $M(T) = M(T')$ .

# Podstruktura

Nechť  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$  a  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B \rangle$  jsou struktury pro jazyk  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ .

Řekneme, že  $\mathcal{B}$  je (indukovaná) **podstruktura**  $\mathcal{A}$ , značeno  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , pokud

- (i)  $B \subseteq A$ ,
- (ii)  $R^B = R^A \cap B^{\text{ar}(R)}$  pro každé  $R \in \mathcal{R}$ ,
- (iii)  $f^B = f^A \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$ , tj.  $f^B = f^A \upharpoonright B^{\text{ar}(f)}$ , pro každé  $f \in \mathcal{F}$ .

**Pozorování** Množina  $C \subseteq A$  je doménou nějaké podstruktury struktury  $\mathcal{A}$ , právě když  $C$  je **uzavřená** na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant).

- Pak příslušnou podstrukturu značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$  a říkáme, že je to **restrikce** (**parcializace**) struktury  $\mathcal{A}$  na  $C$ .
- Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f: A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \in C$  pro každé  $x_0, \dots, x_{n-1} \in C$ .

Např.  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, \mathbf{0} \rangle$  je podstrukturou  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbf{0} \rangle$  a lze psát  $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$ .

Dále  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, \mathbf{0} \rangle$  je jejich podstrukturou a  $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$ .

## Platnost v podstruktuře

Nechť  $\mathcal{B}$  je podstruktura struktury  $\mathcal{A}$  pro (pevný) jazyk  $L$ .

**Tvrzení** Pro každou *otevřenou* formuli  $\varphi$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow B$  platí

$$\mathcal{B} \models \varphi[e] \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e].$$

**Důkaz** Je-li  $\varphi$  atomická, plyne tvrzení z definice platnosti při ohodnocení.

Dále snadno indukcí dle struktury formule.  $\square$

**Důsledek** *Otevřená* formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

- Teorie  $T$  je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek** Každá podstruktura modelu *otevřené* teorie  $T$  je modelem  $T$ .

Např. každá podstruktura grafu, tj. modelu teorie grafů, je rovněž grafem, zveme ho *podgraf*. Obdobně např. podgrupa nebo Booleova podalgebra.

# Generovaná podstruktura, expanze, redukt

Nechť  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$  je struktura a  $X \subseteq A$ . Označme  $B$  **nejmenší** podmnožinu množiny  $A$  obsahující  $X$ , která je **uzavřená** na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). Pak strukturu  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  značíme rovněž  $\mathcal{A}\langle X \rangle$  a podstruktura říkáme, že je to  $\mathcal{A}$  **generovaná** množinou  $X$ .

*Např. pro  $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  a  $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  je  $\mathbb{Q}\langle\{1\}\rangle = \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}\langle\{-1\}\rangle = \mathbb{Z}$  a  $\mathbb{Q}\langle\{2\}\rangle$  je podstruktura na všech sudých přirozených číslech.*

Nechť  $\mathcal{A}'$  je struktura pro jazyk  $L'$  a  $L \subseteq L'$  je jazyk. Odebráním realizací symbolů, jež nejsou v  $L$ , získáme z  $\mathcal{A}'$  strukturu  $\mathcal{A}$ , kterou nazýváme **redukt** struktury  $\mathcal{A}'$  na jazyk  $L$ . Obráceně,  $\mathcal{A}'$  je **expanze** struktury  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L'$ .

*Např.  $\langle \mathbb{N}, + \rangle$  je redukt  $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ . Naopak, struktura  $\langle \mathbb{N}, +, c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  taková, že  $c_i = i$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ , je expanze  $\langle \mathbb{N}, + \rangle$  o **jména prvků** z  $\mathbb{N}$ .*



## Věta o konstantách

**Věta** Necht'  $\varphi$  je formule jazyka  $L$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$  a  $T$  je teorie jazyka  $L$ . Označme  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a  $T'$  teorii  $T$  nad jazykem  $L'$ . Pak

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

**Důkaz** ( $\Rightarrow$ ) Je-li  $\mathcal{A}'$  model teorie  $T'$ , necht'  $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$ . Jelikož  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  pro každé ohodnocení  $e$ , platí i

$$\mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

( $\Leftarrow$ ) Je-li  $\mathcal{A}$  model teorie  $T$  a  $e$  ohodnocení, necht'  $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  na  $L'$  o konstanty  $c_i^{A'} = e(x_i)$  pro všechna  $i$ . Jelikož  $\mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , platí i

$$\mathcal{A}' \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A} \models \varphi[e]. \quad \square$$

# Definovatelné množiny

Zajímá nás, které množiny lze v dané struktuře zdefinovat.

- **Množina definovaná formulí**  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  **ve struktuře**  $\mathcal{A}$  je množina

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]\}.$$

Zkráceným zápisem,  $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$ , kde  $|\bar{x}| = n$ .

- **Množina definovaná formulí**  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  **s parametry**  $\bar{b} \in A^{|\bar{y}|}$  **ve struktuře**  $\mathcal{A}$  je

$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}.$$

*Např. pro  $\varphi = E(x, y)$  je  $\varphi^{\mathcal{G}, b}(x, y)$  množina sousedů vrcholu  $b$  v grafu  $\mathcal{G}$ .*

- Pro strukturu  $\mathcal{A}$ , množinu  $B \subseteq A$  a  $n \in \mathbb{N}$  označme  $\mathbf{Df}^n(\mathcal{A}, B)$  třídu všech množin  $D \subseteq A^n$  definovatelných ve struktuře  $\mathcal{A}$  s parametry z  $B$ .

**Pozorování**  $\mathbf{Df}^n(\mathcal{A}, B)$  je uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik a obsahuje  $\emptyset, A^n$ . Tedy tvoří podalgebru potenční algebry  $\mathcal{P}(A^n)$ .

## Příklad - databázové dotazy

| <i>Filmy</i> | <i>název</i>      | <i>režisér</i> | <i>herec</i> | <i>Program</i> | <i>kino</i> | <i>název</i>      | <i>čas</i> |
|--------------|-------------------|----------------|--------------|----------------|-------------|-------------------|------------|
|              | Lidé z Maringotek | M. Frič        | J. Tříška    |                | Světozor    | Po strništi bos   | 13:15      |
|              | Po strništi bos   | J. Svěrák      | Z. Svěrák    |                | Mat         | Po strništi bos   | 16:15      |
|              | Po strništi bos   | J. Svěrák      | J. Tříška    |                | Mat         | Lidé z Maringotek | 18:30      |
|              | ...               | ...            | ...          |                | ...         | ...               | ...        |

*Kde a kdy mohu dnes vidět film s Janem Tříškou?*

**select** *Program.kino, Program.čas* **from** *Filmy, Program*  
**where** *Filmy.název = Program.název and herec = 'J. Tříška'*;

Totěž dostaneme jako množinu  $\varphi^{\mathcal{D}}(x, y)$  definovanou formulí  $\varphi(x, y)$

$$(\exists n)(\exists r)(P(x, n, y) \wedge F(n, r, \text{'J. Tříška'}))$$

ve struktuře  $\mathcal{D} = \langle D, \text{Filmy}, \text{Program}, c^{\mathcal{D}} \rangle_{c \in D}$  jazyka  $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$ , kde  $D = \{\text{'Po strništi bos'}, \text{'J. Tříška'}, \text{'Mat'}, \text{'13:15'}, \dots\}$  a  $c^{\mathcal{D}} = c$  pro každé  $c \in D$ .

# Booleovy algebry

Teorie *Booleových algeber* jazyka  $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  s rovností má axiomy

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (\text{asociativita } \wedge)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad (\text{asociativita } \vee)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{komutativita } \wedge)$$

$$x \vee y = y \vee x \quad (\text{komutativita } \vee)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{distributivita } \wedge \text{ k } \vee)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (\text{distributivita } \vee \text{ k } \wedge)$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \quad (\text{absorbce})$$

$$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0 \quad (\text{komplementace})$$

$$0 \neq 1 \quad (\text{netrivialita})$$

Nejmenší model je  $\underline{2} = \langle 2, -_1, \wedge_1, \vee_1, 0, 1 \rangle$ . Konečné Booleovy algebry jsou (až na izomorfismus) právě  $\underline{n} = \langle n, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$  pro  $n \in \mathbb{N}^+$ , kde jednotlivé operace (na binárních  $n$ -ticích) jsou operace z  $\underline{2}$  “po složkách”.

# Vztah výrokové a predikátové logiky

- Výrokové formule s (*univerzálními*) spojkami  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  (případně s  $\top$ ,  $\perp$ ) lze považovat za **Booleovské termy**. Hodnota výroku  $\varphi$  při daném ohodnocení je pak hodnotou termu v Booleově algebře 2.
- **Algebra výroků** nad  $\mathbb{P}$  je Booleova algebra (i pro  $\mathbb{P}$  nekonečné).
- Reprezentujeme-li atomické formule v **otevřené** formuli  $\varphi$  (bez rovnosti) pomocí prvovýroků, získáme výrokovou formuli, která je pravdivá, právě když  $\varphi$  je pravdivá.
- Výrokovou logiku lze zavést jako **fragment** predikátové logiky pomocí **nulárních** relačních symbolů (*syntax*) a nulárních relací (*sémantika*), přičemž  $A^0 = \{\emptyset\} = 1$  a tedy  $R^A \subseteq A^0$  je  $R^A = \emptyset = 0$  anebo  $R^A = \{\emptyset\} = 1$ .

# Tablo metoda v PL - rozdíl

- Formule v položkách budou **sentence** (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme **nová atomická tabla** pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat **konstantní termy** dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o **nové (pomocné) konstantní symboly** (spočetně mnoho) pro reprezentaci “svědků” položek  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$ .
- V **dokončené** bezesporné větvi s položkou  $T(\forall x)\varphi(x)$  či  $F(\exists x)\varphi(x)$  budou **instance**  $T\varphi(x/t)$  resp.  $F\varphi(x/t)$  pro každý konstantní term  $t$  (rozšířeného jazyka).

## Tablo v PL - příklady

$$F((\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x))$$

$$\begin{array}{c} | \\ T(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ T(\forall x)P(x) \\ | \\ T(\neg P(c)) \quad c \text{ nové} \\ | \\ \mathbf{FP(c)} \\ | \\ T(\forall x)P(x) \\ | \\ \mathbf{TP(c)} \\ | \\ \otimes \end{array}$$

$$F(\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x))$$

$$\begin{array}{c} | \\ T(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ F(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\forall x)P(x) \\ | \\ \mathbf{FP(d)} \quad d \text{ nové} \\ | \\ F(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\neg P(d)) \\ | \\ \mathbf{TP(d)} \\ | \\ \otimes \end{array}$$