Výroková a predikátová logika - X

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2019/2020

Extenze o definice

Teorie T' jazyka L' je *extenze* teorie T jazyka L *o definice*, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definici relačního či funkčního symbolu.

Důsledek *Nechť T' je extenze teorie T o definice. Pak*

- *každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T',*
- *T' je konzervativní extenze T,*
- *pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Např. v teorii $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ nad $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností lze zavést $<$ a unární funkční symbol $-$ axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

Pak formule $-x < y$ je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli

$$(\exists z)((z \leq y \ \wedge \ \neg(z = y)) \ \wedge \ x + z = 0).$$

Ekvisplnitelnost

Ukážeme, že problém splnitelnosti lze redukovat na otevřené teorie.

- Teorie T, T' jsou *ekvisplnitelné*, jestliže T má model $\Leftrightarrow$ T' má model.
- Formule φ je v *prenexním (normálním) tvaru (PNF)*, má-li tvar

  $$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)\varphi',$$

  kde Q_i značí $\forall$ nebo $\exists$, proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem různé a φ' je otevřená formule, zvaná *otevřené jádro*. $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ je tzv. *prefix*.
- Speciálně, jsou-li všechny kvantifikátory $\forall$, je φ *univerzální* formule.

K teorii T nalezneme ekvisplnitelnou otevřenou teorii následujícím postupem.

(1) Axiomy teorie T nahradíme za ekvivalentní formule v prenexním tvaru.

(2) Pomocí nových funkčních symbolů je převedeme na univerzální formule, tzv. Skolemovy varianty, čímž dostaneme ekvisplnitelnou teorii.

(3) Jejich otevřená jádra budou tvořit hledanou teorii.

Vytýkání kvantifikátorů

Nechť Q značí kvantifikátor $\forall$ nebo $\exists$ a $\overline{Q}$ značí opačný kvantifikátor.
Pro každé formule φ, ψ takové, že x není volná ve formuli ψ,

$$
\begin{array}{lrcl}
\models & \neg(Qx)\varphi & \leftrightarrow & (\overline{Q}x)\neg\varphi \\
\models & ((Qx)\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & (Qx)(\varphi \wedge \psi) \\
\models & ((Qx)\varphi \vee \psi) & \leftrightarrow & (Qx)(\varphi \vee \psi) \\
\models & ((Qx)\varphi \rightarrow \psi) & \leftrightarrow & (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi) \\
\models & (\psi \rightarrow (Qx)\varphi) & \leftrightarrow & (Qx)(\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Uvedené ekvivalence lze ověřit sémanticky nebo dokázat tablo metodou (*přes generální uzávěr, není-li to sentence*).

Poznámka *Předpoklad, že x není volná ve formuli ψ je v každé ekvivalenci (kromě té první) nutný pro nějaký kvantifikátor Q. Např.*

$$\not\models \ ((\exists x)P(x) \wedge P(x)) \ \leftrightarrow \ (\exists x)(P(x) \wedge P(x))$$

Převod na prenexní tvar

Tvrzení *Nechť φ' je formule vzniklá z formule φ nahrazením některých výskytů podformule ψ za formuli ψ'. Jestliže $T \models \psi \leftrightarrow \psi'$, pak $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule φ. □

Tvrzení *Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule φ' v prenexním normálním tvaru, tj. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Indukcí dle struktury φ pomocí vytýkání kvantifikátorů, náhradou podformulí za jejich varianty a využitím předchozího tvrzení o ekvivalenci. □

Např.

$$
\begin{aligned}
((\forall z)P(x,z) \wedge P(y,z)) &\rightarrow \neg(\exists x)P(x,y) \\
((\forall u)P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow (\forall x)\neg P(x,y) \\
(\forall u)(P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v,y) \\
(\exists u)((P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v,y)) \\
(\exists u)(\forall v)((P(x,u) \wedge P(y,z)) &\rightarrow \neg P(v,y))
\end{aligned}
$$

Skolemova varianta

Nechť φ je sentence jazyka L v prenexním normálním tvaru, $y_1, \dots, y_n$ jsou existenčně kvantifikované proměnné ve φ (v tomto pořadí) a pro každé $i \leq n$ nechť $x_1, \dots, x_{n_i}$ jsou univerzálně kvantifikované proměnné před y_i. Označme L' rozšíření L o nové n_i-ární funkční symboly f_i pro každé $i \leq n$.

Nechť φ_S je formule jazyka L', jež vznikne z formule φ odstraněním $(\exists y_i)$ z jejího prefixu a nahrazením každého výskytu proměnné y_i za term $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$. Pak formule φ_S se nazývá *Skolemova varianta* formule φ.

Např. pro formuli φ

$$(\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)R(y_1, x_1, x_2, y_2, x_3)$$

je následují formule φ_S její Skolemovou variantou

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)R(f_1, x_1, x_2, f_2(x_1, x_2), x_3),$$

kde f_1 je nový konstantní symbol a f_2 je nový binární funkční symbol.

Vlastnosti Skolemovy varianty

Lemma *Nechť φ je sentence $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\exists y)\psi$ jazyka L a φ' je sentence $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\psi(y/f(x_1,\ldots,x_n))$, kde f je nový funkční symbol. Pak*

(1) *redukt $\mathcal{A}$ každého modelu $\mathcal{A}'$ formule φ' na jazyk L je modelem φ,*

(2) *každý model $\mathcal{A}$ formule φ lze expandovat na model $\mathcal{A}'$ formule φ'.*

Poznámka Na rozdíl od extenze o definici funkčního symbolu, expanze v tvrzení (2) tentokrát nemusí být jednoznačná.

Důkaz (1) Nechť $\mathcal{A}' \models \varphi'$ a $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na jazyk L. Jelikož pro každé ohodnocení e je $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, kde $a = (f(x_1,\ldots,x_n))^{A'}[e]$, platí $\mathcal{A} \models \varphi$.
(2) Nechť $\mathcal{A} \models \varphi$. Pak existuje funkce $f^A\colon A^n \to A$ taková, že pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, kde $a = f^A(e(x_1),\ldots,e(x_n))$, a tedy expanze $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ o funkci f^A je modelem φ'. $\square$

Důsledek *Je-li φ' Skolemova varianta formule φ, obě tvrzení (1) a (2) pro φ, φ' rovněž platí. Tedy φ, φ' jsou ekvisplnitelné.*

Skolemova věta

Věta *Každá teorie T má otevřenou konzervativní extenzi T^*.*

Důkaz Lze předpokládat, že T je v uzavřeném tvaru. Nechť L je její jazyk.

- Nahrazením každého axiomu teorie T za ekvivalentní formuli v prenexním tvaru získáme ekvivalentní teorii T°.
- Nahrazením každého axiomu teorie T° za jeho Skolemovu variantu získáme teorii T' rozšířeného jazyka L'.
- Jelikož je redukt každého modelu teorie T' na jazyk L modelem teorie T, je T' extenze T.
- Jelikož i každý model teorie T lze expandovat na model teorie T', je to extenze konzervativní.
- Jelikož každý axiom teorie T' je univerzální sentence, jejich nahrazením za otevřená jádra získáme otevřenou teorii T^* ekvivalentní s T'. $\square$

Důsledek *Ke každé teorii existuje ekvisplnitelná otevřená teorie.*

Redukce nesplnitelnosti na úroveň VL

Je-li otevřená teorie nesplnitelná, lze to "doložit na konkrétních prvcích".

Např. teorie

$$T = \{P(x,y) \vee R(x,y),\ \neg P(c,y),\ \neg R(x,f(x))\}$$

jazyka $L = \langle P, R, f, c\rangle$ nemá model, což lze doložit nesplnitelnou konjunkcí konečně mnoha instancí (některých) axiomů teorie T v konstantních termech

$$(P(c,f(c)) \vee R(c,f(c)))\ \wedge\ \neg P(c,f(c))\ \wedge\ \neg R(c,f(c)),$$

což je lživá formule ve tvaru výroku

$$(p \vee r)\ \wedge\ \neg p\ \wedge\ \neg r.$$

Instance $\varphi(x_1/t_1,\dots,x_n/t_n)$ otevřené formule φ ve volných proměnných $x_1,\dots,x_n$ je *základní (ground) instance*, jsou-li všechny termy $t_1,\dots,t_n$ konstantní. Konstantní termy nazýváme také *základní (ground) termy*.

Herbrandův model

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk s alespoň jedním konstantním symbolem.
(Je-li třeba, do L přidáme nový konstantní symbol.)

- *Herbrandovo univerzum* pro L je množina všech konstantních termů z L.
  Např. pro $L = \langle P, f, c \rangle$, kde P je relační, f je binární funkční, c konstantní
  $$A = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c, f(c,c)), f(f(c,c), f(c,c)), \dots\}$$
- Struktura $\mathcal{A}$ pro L je *Herbrandova struktura*, je-li doména A Herbrandovo univerzum pro L a pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a $t_1, \dots, t_n \in A$,
  $$f^A(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$
  (včetně $n = 0$, tj. $c^A = c$ pro každý konstantní symbol c).
  Poznámka *Na rozdíl od kanonické struktury nejsou předepsané relace.*
  Např. $\mathcal{A} = \langle A, P^A, f^A, c^A \rangle$, kde $P^A = \emptyset$, $c^A = c$ a $f^A(c,c) = f(c,c)$, $\dots$.
- *Herbrandův model* teorie T je Herbrandova struktura, jež je modelem T.

Herbrandova věta

Věta *Nechť T je otevřená teorie jazyka L bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem. Pak*

(a) *T má Herbrandův model, anebo*

(b) *existuje konečně mnoho základních instancí axiomů z T, jejichž konjunkce je nesplnitelná, a tedy T nemá model.*

Důkaz Nechť T' je množina všech základních instancí axiomů z T. Uvažme dokončené (např. systematické) tablo τ z T' v jazyce L (bez přidávání nových konstant) s položkou $F\perp$ v kořeni.

- Obsahuje-li tablo τ bezespornou větev V, kanonický model z větve V je Herbrandovým modelem teorie T.
- Jinak je τ sporné, tj. $T' \vdash \perp$. Navíc je konečné, tedy $\perp$ je dokazatelný jen z konečně mnoha formulí T', tj. jejich konjunkce je nesplnitelná. $\square$

Poznámka *V případě jazyka L s rovností teorii T rozšíříme na T^* o axiomy rovnosti pro L a pokud T^* má Herbrandův model $\mathcal{A}$, zfaktorizujeme ho dle $=^{A}$.*

Důsledky Herbrandovy věty

Nechť L je jazyk obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

Důsledek *Pro každou otevřenou $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka L je $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$ pravdivá, právě když existují konstantní termy t_{ij} jazyka L takové, že*

$$\varphi(x_1/t_{11}, \ldots, x_n/t_{1n}) \vee \cdots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \ldots, x_n/t_{mn})$$

je (výroková) tautologie.

Důkaz $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$ je pravdivá $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\neg\varphi$ je nesplnitelná $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ je nesplnitelná. Ostatní vyplývá z Herbrandovy věty pro $\neg\varphi$. $\square$

Důsledek *Otevřená teorie T jazyka L má model, právě když teorie T' všech základních instancí axiomů z T má model.*

Důkaz Má-li T model $\mathcal{A}$, platí v něm každá instance každého axiomu z T, tedy $\mathcal{A}$ je modelem T'. Nemá-li T model, dle H. věty existuje (konečně) formulí z T', jejichž konjunkce je nesplnitelná, tedy T' nemá model. $\square$

Rezoluční metoda v PL - úvod

- Zamítací procedura - cílem je ukázat, že daná formule (či teorie) je nesplnitelná.
- Předpokládá otevřené formule v CNF (v množinové reprezentaci).

  Literál je *(tentokrát)* atomická formule nebo její negace.

  Klauzule je konečná množina literálů, $\square$ značí prázdnou klauzuli.

  Formule (v množinové reprezentaci) je množina (i nekonečná) klauzulí.

  Poznámka *Každou formuli (teorii) umíme převést na ekvisplnitelnou otevřenou formuli (teorii) v CNF, tj. na formuli v množinové reprezentaci.*
- Rezoluční pravidlo je obecnější - umožňuje rezolvovat přes literály, které jsou unifikovatelné.
- Rezoluce v PL je založená na rezoluci ve VL a unifikaci.

Lokální význam proměnných

Proměnné v rámci klauzule můžeme přejmenovat.

Nechť φ je *(vstupní)* otevřená formule v CNF.

- Formule φ je splnitelná, právě když její generální uzávěr φ' je splnitelný.
- Pro každé formule ψ, χ a proměnnou x

  $$\models \quad (\forall x)(\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\forall x)\psi \wedge (\forall x)\chi$$

  (i když x je volná v ψ a χ zároveň).
- Každou klauzuli ve φ lze tedy nahradit jejím generálním uzávěrem.
- Uzávěry klauzulí lze variovat (přejmenovat proměnné).

Např. variovaním druhé klauzule v (1) *získáme ekvisplnitelnou formuli* (2).

(1) $\{\{P(x), Q(x,y)\}, \{\neg P(x), \neg Q(y,x)\}\}$

(2) $\{\{P(x), Q(x,y)\}, \{\neg P(v), \neg Q(u,v)\}\}$

Přímá redukce do VL

Herbrandova věta umožňuje následující postup. Je ale značně neefektivní.

- Nechť S je *(vstupní)* formule v množinové reprezentaci.
- Lze předpokládat, že jazyk obsahuje alespoň jeden konstantní symbol.
- Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí z S.
- Zavedením prvovýroků pro každou atomickou sentenci lze S' převést na (případně nekonečnou) výrokovou formuli v množinové reprezentaci.
- Rezolucí na úrovni VL ověříme její nesplnitelnost.

Např. pro $S = \{\{P(x,y), R(x,y)\}, \{\neg P(c,y)\}, \{\neg R(x,f(x))\}\}$ *je*

$$S' = \{\{P(c,c), R(c,c)\}, \{P(c,f(c)), R(c,f(c))\}, \{P(f(c),f(c)), R(f(c),f(c))\}\ldots,$$
$$\{\neg P(c,c)\}, \{\neg P(c,f(c))\}, \ldots, \{\neg R(c,f(c))\}, \{\neg R(f(c),f(f(c)))\}, \ldots\}$$

nesplnitelná, neboť na úrovni VL je

$$S' \supseteq \{\{P(c,f(c)), R(c,f(c))\}, \{\neg P(c,f(c))\}, \{\neg R(c,f(c))\}\} \vdash_R \square.$$

Substituce - příklady

Efektivnější je využívat vhodných substitucí. Např. pro

$a)$ $\{P(x), Q(x,a)\}$, $\{\neg P(y), \neg Q(b,y)\}$ substitucí x/b, y/a dostaneme $\{P(b), Q(b,a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(b,a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

Nebo substitucí x/y a rezolucí dle $P(y)$ dostaneme $\{Q(y,a), \neg Q(b,y)\}$.

$b)$ $\{P(x), Q(x,a), Q(b,y)\}$, $\{\neg P(v), \neg Q(u,v)\}$ substituce x/b, y/a, u/b, v/a dává $\{P(b), Q(b,a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(b,a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

$c)$ $\{P(x), Q(x,z)\}$, $\{\neg P(y), \neg Q(f(y),y)\}$ substitucí $x/f(z)$, y/z dostaneme $\{P(f(z)), Q(f(z),z)\}$, $\{\neg P(z), \neg Q(f(z),z)\}$ a z nich $\{P(f(z)), \neg P(z)\}$.

Při substituci $x/f(a)$, y/a, z/a dostaneme $\{P(f(a)), Q(f(a),a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(f(a),a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(f(a)), \neg P(a)\}$. Předchozí substituce je ale obecnější.

Substituce

- *Substituce* je (konečná) množina $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, kde x_i jsou navzájem různé proměnné a t_i jsou termy, přičemž t_i není x_i.
- Jsou-li všechny termy t_i konstantní, je σ *základní substituce*.
- Jsou-li t_i navzájem různé proměnné, je σ *přejmenování proměnných*.
- *Výraz* je literál nebo term. *(Substituci lze aplikovat na výrazy.)*
- *Instance* výrazu E *při substituci* $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ je výraz $E\sigma$ vzniklý z E současným nahrazením všech výskytů proměnných x_i za t_i.
- Pro množinu výrazů S označmě $S\sigma$ množinu instancí $E\sigma$ výrazů E z S.

Poznámka *Jelikož substituce je současná pro všechny proměnné zároveň, případný výskyt proměnné x_i v termu t_j nevede k zřetězení substitucí.*

Např. pro $S = \{P(x), R(y,z)\}$ *a substituci* $\sigma = \{x/f(y,z), y/x, z/c\}$ *je*

$$S\sigma = \{P(f(y,z)), R(x,c)\}.$$

Skládání substitucí

Zadefinujeme $\sigma\tau$ *tak, aby* $E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$ *pro každý výraz* E.

Např. pro $E = P(x, w, u)$, $\sigma = \{x/f(y), w/v\}$, $\tau = \{x/a, y/g(x), v/w, u/c\}$ *je*

$$E\sigma = P(f(y), v, u), \quad (E\sigma)\tau = P(f(g(x)), w, c).$$

Pak by mělo být $\sigma\tau = \{x/f(g(x)), y/g(x), v/w, u/c\}$.

Pro substituce $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \ldots, y_n/s_n\}$ definujeme

$$\sigma\tau = \{x_i/t_i\tau \mid x_i \in X,\ x_i \text{ není } t_i\tau\} \cup \{y_j/s_j \mid y_j \in Y \setminus X\}$$

složenou substituci σ a τ, kde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Poznámka *Skládání substitucí není komutativní, např. pro uvedené* σ *a* τ *je*

$$\tau\sigma = \{x/a, y/g(f(y)), u/c, w/v\} \neq \sigma\tau.$$

Skládání substitucí - vlastnosti

Ukážeme, že definice vyhovuje našemu požadavku a skládání je asociativní.

Tvrzení *Pro každý výraz E a substituce σ, τ, ϱ platí*

(i) $(E\sigma)\tau = E(\sigma\tau)$,

(ii) $(\sigma\tau)\varrho = \sigma(\tau\varrho)$.

Důkaz Nechť $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$. Stačí uvážit případ, kdy E je proměnná, řekněme v.

(i) Je-li v proměnná x_i pro nějaké i, je $v\sigma = t_i$ a $(v\sigma)\tau = t_i\tau$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $v\sigma = v$ a $(v\sigma)\tau = v\tau$.

Je-li v proměnná y_j pro nějaké j, je dále $(v\sigma)\tau = v\tau = s_j$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $(v\sigma)\tau = v\tau = v$ a zároveň $v(\sigma\tau) = v$.

(ii) Opakovaným užitím (i) dostaneme pro každý výraz E,

$$E((\sigma\tau)\varrho) = (E(\sigma\tau))\varrho = ((E\sigma)\tau)\varrho = (E\sigma)(\tau\varrho) = E(\sigma(\tau\varrho)). \qquad \square$$