

Výroková a predikátová logika - XII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2019/2020

Axiomatizovatelnost

Zajímá nás, zda se daná část světa dá “dobře” popsat.

Nechť $K \subseteq M(L)$ je třída struktur jazyka L . Řekneme, že K je

- **axiomatizovatelná**, pokud existuje teorie T jazyka L s $M(T) = K$,
- **konečně axiomatizovatelná**, pokud je axiomatizovatelná **konečnou** teorií,
- **otevřeně axiomatizovatelná**, pokud je axiomatizovatelná **otevřenou** teorií,
- **teorie T je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná**, pokud $M(T)$ je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

Pozorování *Je-li K axiomatizovatelná, je uzavřená na elem. ekvivalenci.*

Například

- lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,*
- tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,*
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.*

Důsledek kompaktnosti

Věta *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, má i nekonečný model.*

Důkaz V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$ extenzi teorie T v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů c_i .
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie T' model.
- Tedy dle věty o **kompaktnosti** má T' model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie T . □

Důsledek *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.*

Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie T jazyka s rovností je axiomatizovatelná.

Konečná axiomatizovatelnost

Věta Necht' $K \subseteq M(L)$ a $\bar{K} = M(L) \setminus K$, kde L je jazyk. Pak K je *konečně axiomatizovatelná*, právě když K i \bar{K} jsou axiomatizovatelné.

Důkaz (\Rightarrow) Je-li T konečná axiomatizace K v *uzavřeném* tvaru, pak teorie s jediným axiomem $\bigvee_{\varphi \in T} \neg \varphi$ axiomatizuje \bar{K} . Nyní dokažme (\Leftarrow).

- Necht' T, S jsou teorie jazyka L takové, že $M(T) = K$, $M(S) = \bar{K}$.
- Pak $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$ a dle věty o *kompaktnosti* existují konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že $\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$.
- Jelikož

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T),$$

je $M(T) = M(T')$, tj. konečná T' axiomatizuje K . \square

Konečná axiomatizovatelnost - příklad

Nechť T je teorie těles. Řekneme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je

- **charakteristiky 0**, neexistuje-li žádné $p \in \mathbb{N}^+$ takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ značí term $1 + 1 + \dots + 1$ (+ aplikováno $(p - 1)$ -krát).
- **charakteristiky p** , kde p je prvočíslo, je-li p je nejmenší t.ž. $\mathcal{A} \models p1 = 0$.
- Třída těles charakteristiky p pro p prvočíslo je **konečně** axiomatizována teorií $T \cup \{p1 = 0\}$.
- Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována (**nekonečnou**) teorií $T' = T \cup \{p1 \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}^+\}$.

Tvrzení Třída K těles charakteristiky 0 není **konečně** axiomatizovatelná.

Důkaz Stačí dokázat, že \bar{K} není axiomatizovatelná. Kdyby $M(S) = \bar{K}$, tak $S' = S \cup T'$ má model \mathcal{B} , neboť každá konečná $S^* \subseteq S'$ má model (těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv p vyskytující se v axiomech S^*). Pak ale $\mathcal{B} \in M(S) = \bar{K}$ a zároveň $\mathcal{B} \in M(T') = K$, což není možné. \square

Otevřená axiomatizovatelnost

Věta *Je-li teorie T otevřeně axiomatizovatelná, pak každá podstruktura modelu T je rovněž modelem T .*

Důkaz Necht' T' je otevřená axiomatika $M(T)$, $\mathcal{A} \models T'$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Víme, že pro každé $\varphi \in T'$ je $\mathcal{B} \models \varphi$, neboť φ je otevřená. Tedy \mathcal{B} je modelem T' . \square

Poznámka *Platí i obrácená implikace, tj. je-li každá podstruktura modelu teorie T rovněž modelem T , pak T je otevřeně axiomatizovatelná.*

Např. teorie DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, neboť např. konečná podstruktura modelu DeLO není modelem DeLO.

Např. nejvýše n -prvkové grupy pro pevné $n > 1$ jsou otevřeně axiomatizovány

$$T \cup \left\{ \bigvee_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i = x_j \right\},$$

kde T je (otevřená) teorie grup.

Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

- Intuitivní pojem “*algorithmus*” lze přesně formalizovat (např. pomocí TS).
- Teorie T je *rekurzivně axiomatizovaná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ *skončí* a oznámí, zda $\varphi \in T$.
- Teorie T je *rozhodnutelná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ *skončí* a oznámí, zda $\varphi \in Thm(T)$.
- Teorie T je *částečně rozhodnutelná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ *skončí*, právě když $\varphi \in Thm(T)$.

Tvrzení Pro každou rekurzivně axiomatizovanou teorii T ,

- T je *částečně rozhodnutelná*,
- je-li navíc T *kompletní*, je T *rozhodnutelná*.

Důkaz Konstrukce systematického tabla z T s $F\varphi$ v kořeni poskytuje algoritmus, který rozpoznává $T \vdash \varphi$. Je-li navíc T kompletní, *paralelní* konstrukce pro $F\varphi$ resp. $T\varphi$ v kořeni rozhoduje, zda $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$. □

Rekurzivně spočetná kompletace

Co když efektivně popíšeme všechny jednoduché kompletní extenze?

Řekneme, že množina všech (až na ekvivalenci) **jednoduchých kompletních extenzí** teorie T je **rekurzivně spočetná**, existuje-li algoritmus $\alpha(i, j)$, který generuje i -tý axiom j -té extenze (při nějakém očíslování), případně oznámí, že (takový axiom či extenze) neexistuje.

Tvrzení *Je-li teorie T rekurzivně axiomatizovaná a množina všech (až na ekvivalenci) jejích jednoduchých kompletních extenzí je rekurzivně spočetná, je T rozhodnutelná.*

Důkaz Díky rek. axiomatizaci poskytuje konstrukce systematického tabla z T s $F\varphi$ v kořeni algoritmus pro rozpoznání $T \vdash \varphi$. Pokud ale $T \not\vdash \varphi$, pak $T' \vdash \neg\varphi$ v nějaké jednoduché kompletní extenzi T' teorie T . To lze rozpoznat **paralelní postupnou** konstrukcí systematických tabel pro $T\varphi$ z jednotlivých extenzí.

V i -tém stupni se sestrojí tabla do i kroků pro prvních i extenzí. \square

Příklady rozhodnutelných teorií

Následující teorie jsou rozhodnutelné, ačkoliv jsou nekompletní.

- teorie **čisté rovnosti**; bez axiomů v jazyce $L = \langle \rangle$ s rovností,
- teorie **unárního predikátu**; bez axiomů v jazyce $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol,
- teorie **hustých lineárních uspořádání** $DeLO^*$,
- teorie **algebraicky uzavřených těles** v jazyce $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ s rovností, s axiomy teorie těles a navíc axiomy pro každé $n \geq 1$,

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0) (\exists y) (y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0),$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$ (\cdot aplikováno $(k - 1)$ -krát).

- teorie **komutativních grup**,
- teorie **Booleových algeber**.

Rekurzivní axiomatizovatelnost

Dají se matematické struktury “efektivně” popsat?

- Třída $K \subseteq M(L)$ je **rekurzivně axiomatizovatelná**, pokud existuje rekurzivně axiomatizovaná teorie T jazyka L s $M(T) = K$.
- Teorie T je **rekurzivně axiomatizovatelná**, pokud $M(T)$ je rekurzivně axiomatizovatelná.

Tvrzení Pro každou **konečnou** strukturu \mathcal{A} v **konečném** jazyce s rovností je $\text{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná. Tedy, $\text{Th}(\mathcal{A})$ je **rozhodnutelná**.

Důkaz Necht' $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Teorii $\text{Th}(\mathcal{A})$ axiomatizujeme jednou sentencí (tedy rekurzivně) kompletně popisující \mathcal{A} . Bude tvaru “*existuje právě n prvků a_1, \dots, a_n splňujících právě ty **základní vztahy** o funkčních hodnotách a relacích, které platí ve struktuře \mathcal{A} .*” \square

Příklady rekurzivní axiomatizovatelnosti

Následující struktury \mathcal{A} mají **rekurzivně** axiomatizovatelnou teorii $\text{Th}(\mathcal{A})$.

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, teorií **diskrétních lineárních uspořádání**,
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, teorií **hustých lineárních uspořádání bez konců** (*DeLO*),
- $\langle \mathbb{N}, \mathcal{S}, \mathbf{0} \rangle$, teorií **následníka s nulou**,
- $\langle \mathbb{N}, \mathcal{S}, +, \mathbf{0} \rangle$, tzv. **Presburgerovou aritmetikou**,
- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, teorií **reálně uzavřených těles**,
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, teorií **algebraicky uzavřených těles charakteristiky 0**.

Důsledek Pro uvedené struktury je $\text{Th}(\mathcal{A})$ **rozhodnutelná**.

Poznámka Uvidíme, že ale $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}, \leq \rangle$ rekurzivně axiomatizovat **nelze**. (Vyplývá to z první Gödelovy věty o neúplnosti).

Robinsonova aritmetika

Jak *efektivně* a přitom co nejúplněji axiomatizovat $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$?

Jazyk aritmetiky je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ s rovnostmi.

Robinsonova aritmetika Q má axiomy (konečně mnoho)

$$S(x) \neq 0$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$$

$$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$$

$$x + S(y) = S(x + y)$$

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$$

Poznámka Q je velmi slabá, např. nedokazuje komutativitu či asociativitu operací $+$, \cdot ani tranzitivitu \leq . Nicméně postačuje například k důkazu *existenčních* tvrzení o numerálech, která jsou pravdivá v \mathbb{N} .

Např. pro $\varphi(x, y)$ tvaru $(\exists z)(x + z = y)$ je

$$Q \vdash \varphi(\underline{1}, \underline{2}), \quad \text{kde } \underline{1} = S(0) \text{ a } \underline{2} = S(S(0)).$$

Peanova aritmetika

Peanova aritmetika PA má axiomy

(a) Robinsonovy aritmetiky Q,

(b) schéma indukce, tj. pro každou formuli $\varphi(x, \bar{y})$ jazyka L axiom

$$(\varphi(\mathbf{0}, \bar{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \bar{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \bar{y}).$$

Poznámka PA je poměrně dobrou aproximací $\text{Th}(\mathbb{N})$, dokazuje všechny základní vlastnosti platné v \mathbb{N} (např. komutativitu +). Na druhou stranu existují sentence pravdivé v \mathbb{N} ale nezávislé v PA.

Poznámka V jazyce 2. řádu lze axiomatizovat \mathbb{N} (až na izomorfismus), vezmeme-li místo schéma indukce přímo axiom indukce (2. řádu)

$$(\forall X) ((X(\mathbf{0}) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(S(x)))) \rightarrow (\forall x) X(x)).$$

Hilbertův 10. problém

- Necht' $p(x_1, \dots, x_n)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Má **Diofantická rovnice** $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ celočíselné řešení?
- Hilbert (1900) “Nalezněte algoritmus, který po konečně mnoha krocích určí, zda daná Diofantická rovnice s libovolným počtem proměnných a celočíselnými koeficienty má celočíselné řešení.”

Poznámka Ekvivalentně lze požadovat algoritmus rozhodující, zda existuje řešení v **přirozených** číslech.

Věta (DPRM, 1970) Problém existence celočíselného řešení dané Diofantické rovnice s celočíselnými koeficienty je alg. **nerozhodnutelný**.

Důsledek Neexistuje algoritmus rozhodující pro dané polynomy $p(x_1, \dots, x_n)$, $q(x_1, \dots, x_n)$ s **přirozenými** koeficienty, zda

$$\mathbb{N} \models (\exists x_1) \dots (\exists x_n) (p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n)).$$

Nerozhodutelnost predikátové logiky

Existuje algoritmus, rozhodující o dané sentenci, zda je *logicky* pravdivá?

- Víme, že **Robinsonova aritmetika** Q má konečně axiomů, má za model \mathbb{N} a stačí k důkazu **existenčních** tvrzení o numerálech, která platí v \mathbb{N} .

- Přesněji, pro každou existenční formuli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ jazyka aritmetiky

$$Q \vdash \varphi(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]$$

pro každé $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, kde \underline{a}_i značí a_i -tý numerál.

- Speciálně, pro φ tvaru $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)(p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n))$, kde p, q jsou polynomy s přirozenými koeficienty (numerály), platí

$$\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow Q \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \psi \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \models \psi \rightarrow \varphi,$$

kde ψ je konjunkce (uzávěrů) všech axiomů Q .

- Tedy, pokud by existoval algoritmus rozhodující **logickou pravdivost**, existoval by i algoritmus rozhodující, zda $\mathbb{N} \models \varphi$, což není možné.

Gödelova 1. věta o neúplnosti

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje sentence **pravdivá** v \mathbb{N} a **nedokazatelná** v T .*

Poznámky

- “Rekurzivně axiomatizovaná” znamená, že je “efektivně zadaná”.
- “Extenze R . aritmetiky” znamená, že je “základní aritmetické síly”.
- Je-li navíc $\mathbb{N} \models T$, je teorie T **nekompletní**.
- V důkazu sestavená sentence vyjadřuje “**nejsem dokazatelná v T** ”.
- Důkaz je založen na dvou principech:
 - (a) **aritmetizaci syntaxe**,
 - (b) **self-referenci**.

Aritmetizace - predikát dokazatelnosti

- **Konečné objekty** syntaxe (symboly jazyka, termy, formule, konečná tabla, tablo důkazy) lze vhodně **zakódovat** přirozenými čísly.
- Necht' $[\varphi]$ značí kód formule φ a necht' $\underline{\varphi}$ značí **numerál** (term jazyka aritmetiky) reprezentující $[\varphi]$.
- Je-li T rekurzivně axiomatizovaná, je relace $\text{Prf}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ **rekurzivní**.

$\text{Prf}_T(x, y) \Leftrightarrow$ (tablo) y je důkazem (sentence) x v T .

- Je-li T navíc extenze Robinsonovy aritmetiky Q , dá se dokázat, že Prf_T je **reprezentovatelná** nějakou formulí $\text{Prf}_T(x, y)$ tak, že pro každé $x, y \in \mathbb{N}$

$Q \vdash \text{Prf}_T(\underline{x}, \underline{y}),$ je-li $\text{Prf}_T(x, y),$

$Q \vdash \neg \text{Prf}_T(\underline{x}, \underline{y}),$ jinak.

- $\text{Prf}_T(x, y)$ vyjadřuje “ y je důkaz x v T ”.
- $(\exists y)\text{Prf}_T(x, y)$ vyjadřuje “ x je dokazatelná v T ”.
- Je-li $T \vdash \varphi$, pak $\mathbb{N} \models (\exists y)\text{Prf}_T(\underline{\varphi}, y)$ a navíc $T \vdash (\exists y)\text{Prf}_T(\underline{\varphi}, y)$.

Princip self-reference

- *Tato věta má 16 písmen.*

Self-reference ve formálních systémech většinou není přímo k dispozici.

- *Následující věta má 24 písmen "Následující věta má 24 písmen".*

Přímá reference obvykle je k dispozici, stačí, když umíme "mluvit" o posloupnostech symbolů. Uvedená věta ale není self-referenční.

- *Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 116 písmen "Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 116 písmen".*

Pomocí přímé reference lze dosáhnout self-reference. Namísto "má x písmen" může být jiná vlastnost.

- `main() {char *c="main() {char *c=%c%s%c; printf(c,34,c,34);}"; printf(c,34,c,34);}`

Věta o pevném bodě

Věta Necht' T je bezesporné rozšíření Robinsonovy aritmetiky. Pro každou formuli $\varphi(x)$ jazyka teorie T existuje sentence ψ taková, že $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$.

Poznámka Sentence ψ je self-referenční, říká “splňuji podmínku φ ”.

Důkaz (idea) Uvažme *zdvojující* funkci d takovou, že pro každou formuli $\chi(x)$

$$d(\lceil \chi(x) \rceil) = \lceil \chi(\underline{\chi(x)}) \rceil$$

- Platí, že d je **reprezentovatelná** v T . Předpokládejme (pro jednoduchost), že nějakým termem, který si označme d , stejně jako funkci d .
- Pak pro každou formuli $\chi(x)$ jazyka teorie T platí

$$T \vdash d(\underline{\chi(x)}) = \underline{\chi(\underline{\chi(x)})} \quad (1)$$

- Za ψ vezmeme sentenci $\varphi(\underline{d(\varphi(\underline{d(x))}))$. Stačí ověřit $T \vdash d(\underline{\varphi(\underline{d(x)})}) = \underline{\psi}$.
- To plyne z (1) pro $\chi(x)$ tvaru $\varphi(\underline{d(x)})$, neboť v tom případě

$$T \vdash d(\underline{\varphi(\underline{d(x)})}) = \underline{\varphi(\underline{d(\varphi(\underline{d(x)}))})} \quad \square$$

Nedefinovatelnost pravdy

Řekneme, že formule $\tau(x)$ *definuje pravdu* v aritmetické teorii T , pokud pro každou sentenci φ platí $T \vdash \varphi \leftrightarrow \tau(\underline{\varphi})$.

Věta V žádném bezsporném rozšíření Robinsonovy aritmetiky neexistuje definice pravdy.

Důkaz Dle věty o pevném bodě pro $\neg\tau(x)$ existuje sentence φ taková, že

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\varphi}).$$

Kdyby formule $\tau(x)$ definovala pravdu v T , bylo by

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\varphi,$$

což v bezsporné teorii není možné. \square

Poznámka Důkaz je založen na paradoxu lháře, sentence φ by vyjadřovala “nejsem pravdivá v T ”.

Důkaz 1. věty o neúplnosti

Věta (Gödel) Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje sentence **pravdivá** v \mathbb{N} a **nedokazatelná** v T .

Důkaz Necht' $\varphi(x)$ je $\neg(\exists y)Prf_T(x, y)$, vyjadřuje “ x není dokazatelná v T ”.

- Dle věty o pevném bodě pro $\varphi(x)$ existuje sentence ψ_T taková, že

$$T \vdash \psi_T \leftrightarrow \neg(\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y). \quad (2)$$

ψ_T říká “**nejsem dokazatelná v T** ”. Přesněji, ψ_T je ekvivalentní sentenci vyjadřující, že ψ_T není dokazatelná v T . (Ekvivalence platí v \mathbb{N} i v T).

- Nejprve ukážeme, že ψ_T *není dokazatelná* v T . Kdyby $T \vdash \psi_T$, tj. ψ_T je lživá v \mathbb{N} , pak $\mathbb{N} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$ a navíc $T \vdash (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$. Tedy z (2) plyne $T \vdash \neg\psi_T$, což ale není možné, neboť T je bezesporná.
- Zbývá dokázat, že ψ_T je pravdivá v \mathbb{N} . Kdyby ne, tj. $\mathbb{N} \models \neg\psi_T$, pak $\mathbb{N} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$. Tedy $T \vdash \psi_T$, což jsme již dokázali, že neplatí. \square

Důsledky a zesílení 1. věty

Důsledek *Je-li navíc $\mathbb{N} \models T$, je teorie T nekompletní.*

Důkaz Kdyby byla T kompletní, pak $T \vdash \neg\psi_T$ a tedy $\mathbb{N} \models \neg\psi_T$, což je ve sporu s $\mathbb{N} \models \psi_T$. \square

Důsledek *$\text{Th}(\mathbb{N})$ není rekurzivně axiomatizovatelná.*

Důkaz $\text{Th}(\mathbb{N})$ je bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky a má model \mathbb{N} . Kdyby byla rekurzivně axiomatizovatelná, dle předchozího důsledku by byla nekompletní, ale $\text{Th}(\mathbb{N})$ je kompletní. \square

Gödelovu 1. větu o neúplnosti lze následovně zesílit.

Věta (Rosser) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje **nezávislá** sentence. Tedy T je nekompletní.*

Poznámka *Tedy předpoklad, že $\mathbb{N} \models T$, je v prvním důsledku nadbytečný.*

Gödelova 2. věta o neúplnosti

Označme Con_T sentenci $\neg(\exists y)Prf_T(\underline{0} = \underline{1}, y)$. Platí $\mathbb{N} \models Con_T \Leftrightarrow T \not\vdash \underline{0} = \underline{1}$. Tedy Con_T vyjadřuje, že “ T je bezesporná”.

Věta (Gödel) Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Peanovy aritmetiky platí, že Con_T není dokazatelná v T .

Důkaz (náznak) Necht' ψ_T je Gödelova sentence “nejsm dokazatelná v T ”.

- V první části důkazu 1. věty o neúplnosti jsme ukázali, že

“Je-li T bezesporná, pak ψ_T není dokazatelná v T .” (3)

Jinak vyjádřeno, platí $Con_T \rightarrow \psi_T$.

- Je-li T extenze Peanovy aritmetiky, důkaz tvrzení (3) lze formalizovat v rámci T . Tedy $T \vdash Con_T \rightarrow \psi_T$.
- Jelikož T je bezesporná dle předpokladu věty, podle (3) je $T \not\vdash \psi_T$.
- Z předchozích dvou bodů vyplývá, že $T \not\vdash Con_T$. \square

Poznámka Taková teorie T tedy neumí dokázat vlastní bezespornost.

Důsledky 2. věty

Důsledek Existuje model \mathcal{A} Peanovy aritmetiky t.ž. $\mathcal{A} \models (\exists y) Prf_{PA}(0 = 1, y)$.

Poznámka \mathcal{A} musí být nestandardní model PA, svědkem musí být nestandardní prvek (jiný než hodnoty numerálů).

Důsledek Existuje bezesporná rekurzivně axiomatizovaná extenze T Peanovy aritmetiky taková, že $T \vdash \neg Con_T$.

Důkaz Necht' $T = PA \cup \{\neg Con_{PA}\}$. Pak T je bezesporná, neboť $PA \not\vdash Con_{PA}$. Navíc $T \vdash \neg Con_{PA}$, tj. T dokazuje spornost $PA \subseteq T$, tedy i $T \vdash \neg Con_T$. \square

Poznámka \mathbb{N} nemůže být modelem teorie T .

Důsledek Je-li teorie množin ZFC bezesporná, není Con_{ZFC} dokazatelná v ZFC.