Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 1

2. října 2019

1. Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po n kolech výhrou jednoho z hráčů označených X, Y, přičemž X začíná. Hra je zadaná formulí $\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že ve hře s tahy $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ vyhrává X. Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující
   (a) "X nemůže prohrát", "Y nemůže prohrát",
   (b) "X má vyhrávací strategii",
   (c) "Y má vyhrávací strategii".
2. Je dán (neorientovaný) graf G a dva jeho vrcholy u, v. Sestrojte výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když
   (a) G je bipartitní,
   (b) G má perfektní párování,
   (c) v G existuje cesta mezi u a v.
3. Sestrojte formule 1. řádu (v jazyce teorie grafů) vyjadřující
   (a) "u a v mají alespoň jednoho společného souseda",
   (b) "existují tři navzájem nezávislé hrany",
   (c) "existuje cesta mezi u a v délky n", kde $n > 0$ je předem dané.
4. Sestrojte formule 2. řádu (v jazyce teorie grafů) vyjadřující
   (a) "existuje bipartitní rozklad",
   (b) "existuje perfektní párování",
   (c) "existuje cesta mezi u a v".
5. Sestrojte formule 1. řádu (s relačním symbolem $\leq$) vyjadřující
   (a) "x je nejmenší prvek", "x je minimální prvek",
   (b) "x má bezprostředního následníka",
   (c) "každé dva prvky mají nejmenšího společného předchůdce".
6. Pomocí rovnosti nalezněte formule 1.řádu vyjadřující pro předem dané $n > 0$
   (a) "existuje alespoň n prvků",
   (b) "existuje nejvýše n prvků",
   (c) "existuje právě n prvků"

   Lze pomocí jedné či vícero formulí vyjádřit "existuje nekonečně mnoho prvků"?
7. Sestrojte formuli 2. řádu vyjadřující "existuje konečně mnoho prvků". Návod:
   (a) Sestrojte formule 1. řádu (s funkčním symbolem f) vyjadřující "f je prostá", "f je na".
   (b) Sestrojte formuli 2. řádu vyjadřující "každá funkce, která je na, je prostá".
8. (DÚ) Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.
9. Dokažte, že pokud v definici výrokové formule nahradíme závorky $(,)$ za $|$ (tj. závorka bez rozlišení levé a pravé), bude stále platit, že každá výroková formule má jednoznačně určený vytvořující strom.