## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 10

4. prosince 2019

1. (předchozí DÚ) Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde $F$ je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.

2. Víme, že
   (a) všichni vinni lžou,
   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

3. Označme $L(x, y)$ predikát *"existuje let z $x$ do $y$"* a $S(x, y)$ predikát *"existuje spojení z $x$ do $y$"*. Víme, že
   (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,
   (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,
   (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \to S(x, z))$.

   Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.

4. Nechť $\varphi$, $\psi$ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné $x$, značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.
   (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
   (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
   (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \to (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde $x$ není volná ve $\varphi$,
   (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde $x$ není volná ve $\varphi$,
   (e) $(\exists x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\exists x)\psi(x))$, kde $x$ není volná ve $\varphi$,
   (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \to (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde $x$ není volná ve $\varphi$,
   (g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$,
   (h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$,
   (i) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$, kde $x$ není volná ve $\psi$,
   (j) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$, kde $x$ není volná ve $\psi$.

5. Nechť $\varphi$, $\psi$ jsou ve volných proměnných $x, y, z$ a $w$ je proměnná nevyskytující se ve $\varphi$, $\psi$. Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.
   (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,
   (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,
   (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,
   (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \to (\forall z)\psi) \to (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \to \psi(z/w))$.

6. Nechť $T^*$ je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

   (a) $T^* \models x = y \;\rightarrow\; y = x$ (symetrie $=$)

   (b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\rightarrow\; x = z$ (tranzitivita $=$)

   *Nápověda:* pro (a) v axiomu rovnosti (*iii*) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

7. Nechť $L$ je jazyk obsahující binární relační symbol $E$ a konstantní symboly $a$, $b$ a $T$ je teorie, jež má za model každý (neorientovaný) graf, v němž mezi vrcholy $a$ a $b$ existuje konečná cesta. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že $T$ má i model, ve kterém mezi vrcholy $a$, $b$ neexistuje konečná cesta.

8. Nechť $L$ je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a $T$ je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že $T$ má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v $\mathcal{A}$ existují prvky $c_i$ pro $i \in \mathbb{N}$ s

$$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

**Domácí úkol**

Příklad 6. (1 b).