Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 11

11. prosince 2019

1. (předchozí DÚ) Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že
   (a) $T^* \models x = y \ \rightarrow \ y = x$ (symetrie =)
   (b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \rightarrow \ x = z$ (tranzitivita =)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (*iii*) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

2. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v $\mathcal{A}$ existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s
   $$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$
   (Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

3. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.
   (a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$
   (b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$
   (c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

4. K předchozím formulím nalezněte Skolemovy varianty.

5. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte
   (a) $\models (\forall x)P(x,f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$
   (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)P(x,f(x))$

6. Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x+y=0), (x+y=0) \wedge (x+z=0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů
   $$\begin{aligned} -x = y \quad &\leftrightarrow \quad x + y = 0 \\ x < y \quad &\leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y) \end{aligned}$$
   Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.
   (a) $x + (-x) = 0$
   (b) $x + (-y) < x$
   (c) $-(x+y) < -x$

7. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:
   $$x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1).$$
   Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \rightarrow \ y = z$.
   (a) Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.
   (b) Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$?
   (c) Lze každý model teorie T *jednoznačně* expandovat na model teorie T'?

8. Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.
   (a) Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x,y)$ a proměnnou y?

(b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ.

(c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechozího příkladu?

(d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L.

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

9. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

   (a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.

   (b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

10. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejsplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konst. symboly a, b.

    (a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

    (b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

    (c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

    (d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \to P(x, y)\}$

11. Převeďte následující formule na ekvisplnitelné formule v množinové reprezentaci.

    (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

    (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

    (c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$

    (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \to R(x, y))$

Poznámka

DÚ: příklad 8 (za 1b, toto je poslední DÚ). Druhý test se bude psát na cvičení 8. ledna.