

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 12

18. prosince 2019

1. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ , který není otevřený:

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$.

- Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f .
 - Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S . Je $T' \models \varphi$?
 - Lze každý model teorie T jednoznačně expandovat na model teorie T' ?
2. (předchozí DÚ) Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.
- Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x, y)$ a proměnnou y ?
 - Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ .
 - Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechodního příkladu?
 - K následující formulí nalezněte v T^* ekvivalentní formulí původního jazyka L .

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

3. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.
- $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.
 - $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.
4. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejspitelnou konjunkci základních instancí jejich axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konst. symboly a, b .
- $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$
 - $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$
 - $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
 - $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$
5. Převeďte následující formule na ekvivalentní formule v množinové reprezentaci.
- $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
 - $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
 - $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$
 - $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$
6. Pomocí unifikačního algoritmu nalezněte nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, že nejsou unifikovatelné.
- $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
 - $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
 - $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
 - $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
7. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících dvojic klauzulí.
- $\{P(x, y), P(y, z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$

- (b) $\{P(x, x), \neg R(x, f(x))\}, \{R(x, y), Q(y, z)\}$
- (c) $\{P(x, y), \neg P(x, x), Q(x, f(x), z)\}, \{\neg Q(f(x), x, z), P(x, z)\}$

8. Ukažte, že následující množina klauzulí je rezolucí zamítnutelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého rezolučního kroku napište použitou substituci a označte rezolvované literály.

- (a) $\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}$
- (b) $\{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}$
- (c) $\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}$
- (d) $\{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}$
- (e) $\{\neg H(v, a)\}$

9. Nalezněte (konečnou) nespílitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z předchozího příkladu.

10. Víme, že

- (a) Pokud je cihla na jiné cihle, tak není na zemi.
- (b) Každá cihla je buď na zemi nebo na jiné cihle.
- (c) Žádná cihla není na cihle, která je na další cihle.

Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že když je cihla na jiné cihle, ta spodní je na zemi.

11. Víme, že

- (a) Každý holič holí každého, kdo se neholí sám.
- (b) Žádný holič neholí někoho, kdo se holí sám.

Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že žádný holič neexistuje.

Poznámka

DÚ není zadán. Druhý test se bude psát na posledním cvičení 8.1.