Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 2

9. října 2019

1. (předchozí DÚ) Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.

2. Formuli z předchozího příkladu vygenerujte (např. nějakým skriptem) v DIMACS formátu a spusťte na ni vhodný SAT solver, např. `glucose`. Dále pomocí SAT solveru nalezněte nejmenší n (dle Schurovy věty bude existovat), pro které v každém obarvení čísel 1 až n dvěma barvami bude existovat monochromatická trojice $a < b < c$ s $a + b = c$.

3. Existuje binární řetězec $x_1 \dots x_n$, ve kterém nejsou tři 0 se stejně velkými mezerami mezi nimi ani tři 1 se stejně velkými mezerami mezi nimi? (Např. pro $n = 8$ řetězec 01001011 téměř vyhovuje, až na trojici x_2, x_5, x_8.) Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.

4. Pomocí SAT solveru nalezněte nejmenší n (dle van der Waerdenovy věty bude existovat), pro které každý binární řetězec $x_1 \dots x_n$ bude obsahovat tři 0 nebo tři 1 se stejně velkými mezerami mezi nimi.

5. Je možné seřadit dvě kopie množin $\{1, 2, \dots, n\}$ do posloupnosti délky $2n$, ve které budou (ty dva) výskyty k s mezerou (tj. počet slotů mezi nimi) velikosti k pro každé k? Sestrojte výrokovou formuli φ_n pro $n = 3$, která je splnitelná, právě když to lze.

6. Pomocí SAT solveru experimentálně dojděte k hypotéze, která říká, pro která n takové uspořádání (z přechozího příkladu) lze nalézt.

7. Dokažte, že pokud v definici výrokové formule nahradíme závorky $($, $)$ za $|$ (tj. závorka bez rozlišení levé a pravé), bude stále platit, že každá výroková formule má jednoznačně určený vytvořující strom.

8. Dokažte či vyvraťte, že následující množiny logických spojek jsou univerzální.
   (a) $\{\downarrow\}$, kde $\downarrow$ je Peirceova spojka (NOR)
   (b) $\{\uparrow\}$, kde $\uparrow$ je Shefferova spojka (NAND)
   (c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

9. Převeďte následující výroky do DNF a CNF a) tabulkou (určením modelů), b) ekvivalentními úpravami.
   (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$
   (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$
   (c) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$

10. Ukažte, že pro spočetně nekonečnou množinu prvovýroků $\mathbb{P}$ neplatí, že každou $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ lze *namodelovat* výrokem v CNF i výrokem v DNF.

11. Nalezněte (co nejkratší) DNF i CNF reprezentaci Booleovské funkce maj: $\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, definované jako převládající hodnota ze tří (tj. majorita).

12. Pomocí implikačního grafu zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1$$

Domácí úkol

Vyberte si jednu ze tří možností: příklad 2. (za 1 bod), příklady 3. a 4. (za 2 body), příklad 5. a 6. (za 2 body). Termín odevzdání: 23.10. (na cvičení za dva týdny). Řešení by mělo obsahovat:

- Př. 3/5 Specifikaci, co kódují prvovýroky, co vyjadřují jednotlivé podformule, jak se z nich sestaví celá formule φ_n pro obecné n.
- Př. 3/5 Konkrétní formuli pro stanovené n ($n = 8$ u příkladu 3., $n = 3$ u příkladu 5.)
- Př. 2/4/6 Shrnutí, jaký SAT řešič jste použili, na jaké instance, případně jak dlouho trval výpočet a k jakému výsledku jste (ne)došli.
- Př. 2/4/6 Soubory s CNF instancemi, které jste testovali (aby bylo možné vaše řešení ověřit), případně skript na jejich vygenerování.

Soubory pošlete mailem. Specifikaci, konkrétní formuli a shrnutí není nutné psát v TeXu apod., stačí naskenované pdf, nebo odevzdat papírově na cvičení.