

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 4

23. října 2019

1. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$ s $|M(\varphi)| = m$.
 - (a) Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
 - (b) V kolika neekvivalentních teoriích nad \mathbb{P} platí φ ? V kolika neekvivalentních *kompletních* teoriích nad \mathbb{P} platí φ ?
 - (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
 - (d) Nechť navíc $\{\varphi, \psi\}$ je sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?
2. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.

- (a) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
- (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
- (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- (d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (e) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Jsou zkonstruovaná tabla systematická?

3. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.

- (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee r)\}$
- (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$
- (c) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

4. Tablo metodou dokažte, či nalezněte protipříklad, že

- (a) $\{\neg q, p \vee q\} \models p$,
- (b) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$,
- (c) $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$.

5. Sestrojte atomické tablo pro Peirceovu spojku \downarrow (NOR) a pro Shefferovu spojku \uparrow (NAND).
6. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii T , formule φ, ψ ,

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

7. Ukažte, že každé atomické tablo τ je *korektní*, tj. shoduje-li se ohodnocení v s položkou v kořeni τ , shoduje se i nějakou větví v τ .
8. V důkazu lemmatu o úplnosti tablo metody jsme na přednášce ověřili, že shoduje-li se ohodnocení v s každou položkou dokončené větve V do dané hloubky i vytvořujícího stromu, shoduje se i s položkou tvaru $T(\varphi \wedge \psi)$ či $F(\varphi \wedge \psi)$ na V , kde $\varphi \wedge \psi$ má hloubku $i + 1$. Dokažte totéž pro ostatní logické spojky.
9. (DŮ) Nechť \mathcal{S} je spočetný neprázdný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že má *prostý selektor*, pokud existuje prostá funkce $f: \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ taková, že $f(S) \in S$ pro každé $S \in \mathcal{S}$. Dokažte, že \mathcal{S} má prostý selektor, právě když má každá jeho neprázdňá konečná podmnožina prostý selektor.