Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 6

6. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Předpokládejme, že máme k dispozici MgO, H_2, O_2, C a lze provést reakce:

$$\begin{aligned} &(1) \quad MgO + H_2 \;\rightarrow\; Mg + H_2O \\ &(2) \quad C + O_2 \;\rightarrow\; CO_2 \\ &(3) \quad CO_2 + H_2O \;\rightarrow\; H_2CO_3 \end{aligned}$$

   (a) Reprezentujte naše možnosti výrokem a převeďte ho do množinové reprezentace.
   (b) Pomocí LI-rezoluce dokažte, že můžeme získat H_2CO_3.

2. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí s, tj. $T \models s$.

3. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule φ, ψ, χ následující vztahy.
   (a) $\vdash_H \varphi \rightarrow \varphi$
   (b) $T \vdash_H \varphi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \chi\}$
   (c) $T \vdash_H \psi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi,\ \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\}$

4. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.
   (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$
   (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
   (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

5. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?
   (a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
   (b) term z za proměnnou y, term $2 * y$ za proměnnou y,
   (c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

6. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?
   (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
   (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
   (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

7. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \rhd^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$. Určete, zda jsou následující formule v pravdivé v $\mathcal{A}$.
   (a) $x \rhd y$
   (b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
   (c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \rightarrow (x \rhd x))$
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
   (e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

8. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

9. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
   (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
   (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
   (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
   (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

Pozn.

Příští týden 13.11. se bude psát první test. Domácí úkol nebyl zadán.