Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 8

20. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
   (a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
   (b) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
   (c) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
   (d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

2. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, sentenci ψ,
   (a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
   (b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
   (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
   (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

   Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ, ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ, ve které x není volná?

3. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

   Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.
   (a) $x + y = y + x$
   (b) $x + y = x \ \rightarrow \ y = 0$
   (c) $x + y = 0 \ \rightarrow \ y = -x$
   (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

4. Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
   (a) Je $\underline{\mathbb{Z}}_4$ modelem teorie grup?
   (b) Určete generované podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}_4\langle a \rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$.
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}}_4$ i jiné podstruktury?
   (d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}}_4$ modelem teorie grup?
   (e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}}_4$ elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Z}}_4$?
   (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy komutativní grupou?

5. Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).
   (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
   (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ expandovat na model teorie grup?
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?
   (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

6. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.
   (a) Je T (sémanticky) bezesporná?
   (b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) kompletní?
   (c) Určete všechny její jednoduché kompletní extenze (až na ekvivalenci).
   (d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchou extenzí? Je T' konzervativní extenzí? Je teorie $T^* = T \cup T'$ konzervativní extenzí teorie T?

7. Uvažme níže uvedenou filmovou databázi jako relační strukturu $\mathcal{D} = \langle D, Filmy, Program, c^D \rangle_{c \in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$ s rovností, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', … $\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$. Napište formule definující v $\mathcal{D}$ tabulku
   (a) filmů, ve kterých hraje jejich režisér,
   (b) kin a časů, kdy je možné shlédnout film, ve kterém hraje jeho režisér,
   (c) režisérů, kteří hrají ve filmech promítaných v kinu Mat,
   (d) herců či režisérů, jejichž film se nikde nepromítá.

Filmy	*název*	*režisér*	*herec*
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříska
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříska
	…	…	…

Program	*kino*	*název*	*čas*
	Světozor	Po strništi bos	13:15
	Mat	Po strništi bos	16:15
	Mat	Lidé z Maringotek	18:30
	…	…	…

8. Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.

Domácí úkol

Příklad 6 (1 bod).