Zkouška VPL - písemná část

9. ledna 2020

1. Uvažme lety a dosažitelnost mezi Prahou, Horní Lhotou, Londýnem a New Yorkem. Víme:

   (i) *Pokud se z jednoho města dá letět do druhého, dá se letět i nazpátek.*

   (ii) *Let z jednoho města do druhého znamená, že druhé město je z prvního dosažitelné.*

   (iii) *Dosažitelnost je transitivní.*

   (iv) *Z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku.* (O dalších letech nevíme.)

   Rezolucí ve výrokové logice chceme dokázat, že

   (v) *Z Horní Lhoty se dá dostat do New Yorku.*

   Nechť prvovýroky $l_{i,j}$ a $d_{i,j}$ pro města $i, j \in \{$Praha, Horní Lhota, Londýn, New York$\}$ označují, že *"Z města i se dá letět do města j"*, resp. že *"Z města i je město j dosažitelné"*. Označme $\mathbb{P} = \{l_{i,j}, d_{i,j} \mid i, j \in \{\text{Praha, Horní Lhota, Londýn, New York}\}\}$.

   (a) Napište množiny T_1, T_2, T_3, T_4 výroků nad $\mathbb{P}$ vyjadřující (po řadě) $(i), (ii), (iii), (iv)$. *(2b)*

   (b) Převodem axiomů teorie $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ na CNF a pomocí výroku $d_{\text{HorniLhota,NewYork}}$ napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T \models d_{\text{HorniLhota,NewYork}}$. *(2b)*

   (c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(3b)*

   (d) Je $S \vdash_{LI} \square$? Odpověď zdůvodněte. *(2b)*

   (e) Zjistěte, kolik má teorie T jednoduchých kompletních extenzí. Napište jednu takovou jednoduchou kompletní extenzi. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)(P(x) \vee Q(x)),\ (\exists x)(\neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q\rangle$ bez rovnosti, kde P, Q jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\forall x)P(x)$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(3b)*

   (b) Z nejlevější bezesporné větve předchozího tabla sestrojte kanonický model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí. *(2b)*

   (c) Je φ dokazatelná, zamítnutelná, nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle \leq, \cdot, f, g\rangle$ s rovností, kde $\leq$ je binární relační symbol, $\cdot$ je binární funkční symbol a f, g jsou unární funkční symboly, s axiomy

$$\begin{aligned} \varphi_1 :&\quad (\exists x)(\forall z)(f(z) \leq x \cdot g(z)),\\ \varphi_2 :&\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(y \leq z \rightarrow f(z) \leq x \cdot g(z)). \end{aligned}$$

   (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

   (b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}^+, \leq, \cdot, f^A, g^A\rangle$, kde $\leq$ a $\cdot$ mají svůj obvyklý význam na $\mathbb{N}^+$, $f^A(n) = 10n^2$ a $g^A(n) = n^3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*