Zkouška VPL - písemná část

22. ledna 2020

1. Jan má dva přátele: Toma, který vždy mluví pravdu, a Filipa, který vždy lže. Řekli o tom, co dělá o sobotách, toto:

   - Tom řekl: "Jan čte knihy nebo se dívá na televizi nebo vaří."
   - Tom řekl: "Když Jan nepracuje, nedívá se ani na televizi."
   - Filip řekl: "Jan pracuje."
   - Filip řekl: "Jan nečte knihy a nedívá se na televizi a vaří."

   (a) Přeložte výroky Toma a negace výroků Filipa do výrokové teorie T v jazyce $L = \langle k, v, t, p\rangle$ (kde výrokové proměnné mají po řadě význam "čte knihy", "vaří", "dívá se na televizi" a "pracuje"). *(2b)*

   (b) Pomocí rezoluční metody ukažte, že z teorie T vyplývá, že o sobotách "Jan čte knihy". Nakreslete rezoluční strom. *(3b)*

   (c) Najděte množinu všech modelů teorie T. Axiomatizujte ji pomocí výroku v CNF a výroku v DNF. *(2b)*

   (d) Určete počet výroků (až na logickou ekvivalenci) platných v teorii T. *(2b)*

2. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$\begin{aligned} T = \{&R(x, x), \\ &R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \\ &R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, \\ &R(f(x), x)\} \end{aligned}$$

   Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\begin{aligned} \varphi &= R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d), \\ \psi &= (\exists x)R(x, f(x)). \end{aligned}$$

   (a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. Kromě axiomů rovnosti můžete v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$ (což je důsledek axiomů rovnosti). *(4b)*

   (b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí. *(2b)*

   (c) Kolik jednoduchých úplných extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Napište dvě z nich. *(3b)*

   (d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R\rangle$ s rovností:

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$

   Je T konzervativní extenzí S? Zdůvodněte. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle R\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, s axiomy

$$\begin{aligned} \varphi_1 :&\quad (\exists y)R(y, x), \\ \varphi_2 :&\quad (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z))). \end{aligned}$$

   (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

   (b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, R^A\rangle$, kde $(n, m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*