Zkouška VPL - písemná část

24. ledna 2020

1. Problém splňování omezujících podmínek (CSP) je definován konečnými množinami proměnných $\mathcal{X} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ a jejich konečných domén $\mathcal{D} = \{D_{x_0}, \ldots, D_{x_n}\}$ a množinou podmínek $\mathcal{C}$. Řešení takového problému je přiřazení hodnot proměnným tak, že každá proměnná má právě jednu hodnotu ze své domény a zároveň jsou splněné všechny podmínky z $\mathcal{C}$. Uvažujme jednoduchý CSP na třech proměnných a, b, c s následujícími doménami a podmínkami:

   (i) $a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{2, 3, 4\}, c \in \{2, 3, 4, 5\}$,

   (ii) $a \geq b$,

   (iii) $a \neq b \neq c \neq a$.

   Chceme ve výrokové logice dokázat, že v takovém případě

   (iv) $c = 4$ nebo $b = 2$.

   Nechť prvovýroky p_i pro proměnné $p \in \{a, b, c\}$ a hodnoty $i \in D_p$ označují, že "$p = i$".

   (a) Napište množiny výroků T_1, T_2, T_3 a výrok φ vyjadřující (po řadě) *(i)*, *(ii)*, *(iii)* a *(iv)*. *(2b)*

   (b) Vytvořte teorii S, která je nesplnitelná právě tehdy, když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \varphi$. Zapište S v množinové reprezentaci. *(2b)*

   (c) Pomocí rezoluční metody dokažte, že teorie S je nesplnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(3b)*

   (d) Je $S \vdash_{LI} \square$? Zdůvodněte. *(2b)*

   (e) Je teorie $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ kompletní? Zdůvodněte. Pokud není napište nějaký výrok nezávislý v T. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R je binární resp. unární relační symbol.

   (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nesplnitelná. *(3b)*

   (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T'. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b). (2b)*

   (d) Je sentence $(\forall x)R(x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2),\ \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.

   (a) Je teorie T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle\rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*