

Zkouška VPL - písemná část

28. ledna 2020

1. Jsou dány dva výroky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$:

$$\varphi : (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r),$$

$$\psi : (\neg s \vee \neg r) \wedge (\neg t \vee s) \wedge \neg p.$$

- (a) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda je výrok $\varphi \wedge \psi$ splnitelný. Pokud ano, nalezněte nějaké ohodnocení splňující $\varphi \wedge \psi$. (2b)
- (b) Převeďte φ do DNF a určete množinu $M^{\mathbb{P}'}(\varphi)$ všech modelů φ nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$. (2b)
- (c) Tablo metodou dokažte, že v teorii $T = \{\varphi, \psi\}$ platí $\neg t$. (3b)
- (d) Je teorie $T = \{\varphi, \psi\}$ nad \mathbb{P} konzervativní extenzí teorie $S = \{\varphi\}$ nad \mathbb{P}' ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Víme, že:
- (i) Rodiče jsou starší než jejich děti.
- (ii) “Být rodičem” je asymetrická relace.
- (iii) “Být starší” je tranzitivní relace.
- (iv) Tom je otcem Mary, Mary není starší než Bob, Bob je synem Jane.

Ukažte rezolucí, že pak:

- (v) Tom je starší než Bob nebo Mary není matkou Jane.

Konkrétně:

- (a) Tvrzení (i) až (v) vyjádřete otevřenými formullemi φ_1 až φ_5 jazyka $L = \langle R, S, t, m, b, j \rangle$ bez rovnosti, kde R, S jsou binární relační symboly, $R(x, y), S(x, y)$ značí (respektive), že “ x je rodičem y ”, “ x je starší než y ”, a t, m, b, j jsou konstantní symboly označující Toma, Mary, Boba, Jane (respektive). (2b)
- (b) Převodem na CNF nalezněte otevřenou teorii S v množinové reprezentaci, která je nespjitelná, právě když v teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ platí φ_5 . (2b)
- (c) Rezolucí dokažte, že S není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. (3b)
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie S , která je nespjitelná. (2b).
- (e) Je teorie T ω -kategorická? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a axiom φ vyjadřuje, že “existují nejvýše 3 prvky”.
- (a) Napište dvě navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T . (2b)
- (b) Nechť $T' = \{f(x) = f(f(f(x))), \varphi\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T ? Je T extenze T' ? Uveďte zdůvodnění. (2b)