## Zkouška VPL - písemná část

6. února 2020

1. Nechť $T = \{p \vee q \leftrightarrow (q \rightarrow r),\ p \wedge r \rightarrow q\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie $T$. *(3b)*
   (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Je $T$ extenzí teorie $S = \{q \rightarrow r\}$ nad $\mathbb{P}' = \{q, r\}$? Je $T$ konzervativní extenzí $S$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Určete, kolik je navzájem v teorii $T$ neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou v $T$ ($i$) lživé, ($ii$) nezávislé. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Jsou dána následující tvrzení:
   ($i$) Nikdo nezná všechno, co má.
   ($ii$) Když někdo někoho zná, zná i všechno, co ten druhý má.
   ($iii$) Anna a Bob se znají navzájem.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   ($iv$) Anna zná něco, co nezná Bob.

   Konkrétně:

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ jazyka $L = \langle Z, M, a, b\rangle$ bez rovnosti, kde $Z, M$ jsou binární relační symboly a $Z(x, y)$, $M(x, y)$ značí (po řadě), že "$x$ zná $y$", "$x$ má $y$"; $a, b$ jsou konstantní symboly označující (po řadě) Annu, Boba. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nebo jejich negací nalezněte otevřenou teorii $T$ (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \varphi_4$. *(2b)*
   (c) Převedením axiomů $T$ do CNF nalezněte teorii $S$ ekvivalentní $T$ a axiomatizovanou klauzulemi. Napište $S$ v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (d) Rezolucí dokažte, že $S$ není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(3b)*
   (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie $T$, která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d). (2b)*

3. Nechť $T$ je extenze teorie $DeLO^{+}$ (tj. hustých lineárních uspořádání s maximálním prvkem a bez minimálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d\rangle$ s rovností, kde $c$, $d$ jsou nové konstantní symboly.
   (a) Jsou sentence $(\forall x)(x \leq d)$ a $(\forall x)(d \leq x)$ pravdivé / lživé / nezávislé v $T$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie $T$. *(2b)*