

Výroková a predikátová logika - VIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/21

Tablo metoda ve VL - opakování

- **Tablo** je binární strom reprezentující vyhledávání *protipříkladu*.
- Vrcholy jsou označeny **položkami**, tj. formulemi s **příznakem** T / F , který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu platí / neplatí.
- Je-li tento předpoklad správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.
- Větev je **sporná** (selže), pokud obsahuje $T\psi$, $F\psi$ pro nějaké ψ .
- **Důkaz** formule φ je **sporné** tablo s kořenem $F\varphi$, tj. tablo v němž každá větev je sporná (nebyl nalezen protipříklad), pak φ je pravdivá.
- Pokud protipříklad existuje, v **dokončeném** tablu bude větev, která ho **poskytuje**, tato větev může být nekonečná.
- Lze zkonstruovat **systematické tablo**, jež je vždy dokončené.
- Pokud je φ pravdivá, systematické tablo pro φ je sporné, tj. důkazem φ , v tom případě je i **konečné**.

Tablo metoda v PL - rozdílly

- Formule v položkách budou **sentence** (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme **nová atomická tabla** pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat **konstantní termy** dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o **nové (pomocné) konstantní symboly** (spočetně mnoho) pro reprezentaci “svědků” položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V **dokončené** bezesporné větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou **instance** $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Tablo v PL - příklady

$$F((\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x))$$

$$\begin{array}{c} | \\ T(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ T(\forall x)P(x) \\ | \\ T(\neg P(c)) \quad c \text{ nové} \\ | \\ \color{red}{FP(c)} \\ | \\ T(\forall x)P(x) \\ | \\ \color{red}{TP(c)} \\ | \\ \otimes \end{array}$$

$$F(\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x))$$

$$\begin{array}{c} | \\ T(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ F(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\forall x)P(x) \\ | \\ \color{red}{FP(d)} \quad d \text{ nové} \\ | \\ F(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\neg P(d)) \\ | \\ \color{red}{TP(d)} \\ | \\ \otimes \end{array}$$

Předpoklady

- 1) *Dokazovaná formule φ je **sentence**.* Není-li φ sentence, můžeme ji nahradit za její **generální uzávěr** φ' , neboť pro každou teorii T ,

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T \models \varphi'.$$

- 2) *Dokazujeme z teorie v **uzavřeném tvaru**, tj. každý axiom je sentence.* Nahrazením každého axiomu ψ za jeho generální uzávěr ψ' získáme **ekvivalentní** teorii, neboť pro každou strukturu \mathcal{A} (daného jazyka L),

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \psi'.$$

- 3) *Jazyk L je **spočetný**.* Pak každá teorie nad L je spočetná. Označme L_C rozšíření jazyka L o nové konstantní symboly c_0, c_1, \dots (spočetně nekonečně mnoho). Platí, že konstantních termů jazyka L_C je spočetně. Necht' t_i označuje i -tý konstantní term (v pevně zvoleném **očíslování**).

- 4) *Zatím budeme předpokládat, že jazyk je **bez rovnosti**.*

Atomická tabla - původní

Atomická tabla jsou všechny následující (položkami značkové) stromy, kde α je libovolná atomická sentence a φ, ψ jsou libovolné sentence, vše v L_C .

$T\alpha$	$F\alpha$	$\begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\ \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \wedge \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\varphi \vee \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\ \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$
$\begin{array}{c} T(\neg\varphi) \\ \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\neg\varphi) \\ \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\varphi \rightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \rightarrow \psi) \\ \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\varphi \\ \quad \\ T\psi \quad F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\varphi \\ \quad \\ F\psi \quad T\psi \end{array}$

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkové) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x , t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je **nový** konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

#	*	*	#
$T(\forall x)\varphi(x)$	$F(\forall x)\varphi(x)$	$T(\exists x)\varphi(x)$	$F(\exists x)\varphi(x)$
$T\varphi(x/t)$	$F\varphi(x/c)$	$T\varphi(x/c)$	$F\varphi(x/t)$
pro libovolný konst. term t	pro <i>novou</i> konstantu c	pro <i>novou</i> konstantu c	pro libovolný konst. term t

Poznámka Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.

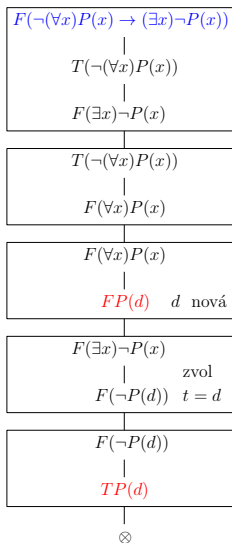
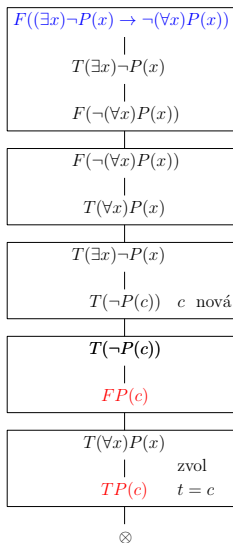
Tablo

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkový strom s předpisem

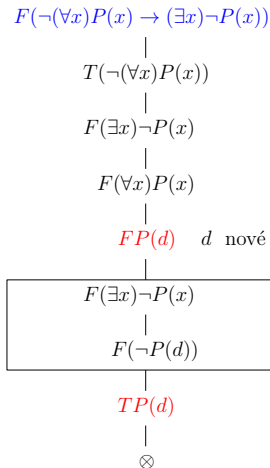
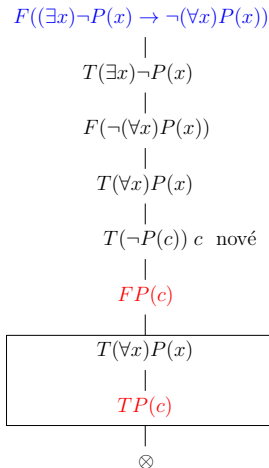
- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T , přičemž v případě (*) lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T , pak připojením atomického tabla pro P na **konec větve** V vznikne konečné tablo z T , přičemž v případě (*) lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud **nevyskytuje** na V ,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T .
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (iii).

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně $\tau = \cup \tau_n$.

Konstrukce tabla



Konvence



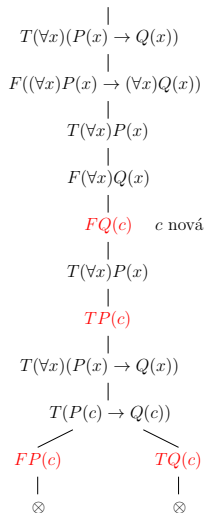
Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

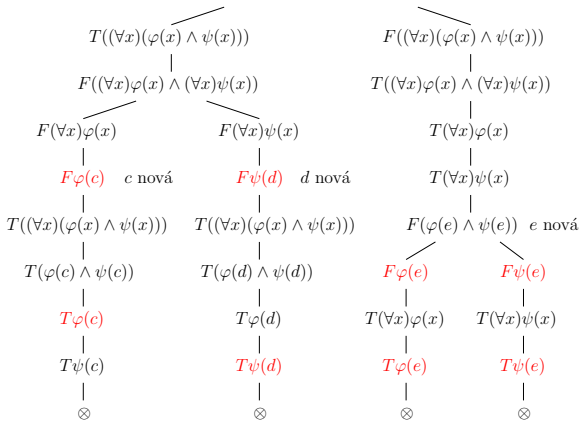
- Větev V tabla τ je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ , jinak je *bezesporná*.
- Tablo τ je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence φ z teorie T je *sporné tablo* z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je (*tablo*) *dokazatelná* z teorie T , píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T .
- *Zamítnutí* sentence φ *tablem* z teorie T je *sporné tablo* z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je (*tablo*) *zamítnutelná* z teorie T , má-li zamítnutí tablem z T , tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady

$$F((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)))$$



$$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$$



Dokončené tablo

Chceme, aby dokončená bezesporná větev poskytovala *protipříklad*.

Výskyt položky P ve vrcholu v tabla τ je *i -tý*, pokud v má v τ právě $i - 1$ předků označených P a je *redukováný* na větvi V skrze v , pokud

- P není tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$ a P se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k rozvoji P na V , nebo
- P je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$, má $(i + 1)$ -ní výskyt na V a zároveň se na V vyskytuje $T\varphi(x/t_i)$ resp. $F\varphi(x/t_i)$, kde t_i je i -tý konstantní term (jazyka L_C).

Nechť V je větev tabla τ z teorie T . Řekneme, že

- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo každý výskyt položky na V je redukováný na V a navíc V obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

Systematické tablo - konstrukce

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

- (1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R . V případě (*) vezmi lib. $c \in L_C \setminus L$, v případě (#) za t vezmi term t_1 . Dokud to lze, aplikuj následující kroky.
- (2) Nechť v je **nejlevější** vrchol v co **nejmenší** úrovni již daného tabla τ_n obsahující výskyt položky P , který není redukovaný na nějaké bezesporné větvi **skrže** v . (Neexistuje-li v , vezmi $\tau'_n = \tau_n$ a jdi na (4).)
- (3a) Není-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrže v . V případě (*) za c vezmi c_i pro nejmenší možné i .
- (3b) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ a ve v má i -tý výskyt, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrže v , přičemž za t vezmi term t_i .
- (4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n , vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z T pro R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup \tau_n$.

Systematické tablo - příklad

$$T((\exists y)(\neg R(y, y) \vee P(y, y)) \wedge (\forall x)R(x, x))$$

$$T(\exists y)(\neg R(y, y) \vee P(y, y))$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$T(\neg R(c_0, c_0) \vee P(c_0, c_0)) \quad c_0 \text{ nová}$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$TR(c_0, c_0) \quad (\text{za předpokladu } t_1 = c_0)$$

$$T(\neg R(c_0, c_0))$$

$$TP(c_0, c_0)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$TR(t_2, t_2)$$

$$TR(t_2, t_2)$$

$$FR(c_0, c_0)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$\otimes$$

$$TR(t_3, t_3)$$

$$\vdots$$

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ **dokončené**.

Důkaz Necht' $\tau = \cup \tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni a necht' P je položka ve vrcholu v tabla τ .

- Do úrovně v (včetně) je v τ jen konečně mnoho výskytů všech položek.
- Kdyby výskyt P ve v byl neredukovaný na nějaké bezesporné větvi v τ , byl by vybrán v nějakém kroku (2) a zredukován v (3a) či (3b).
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. \square

Tvrzení Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.

Důkaz Kdyby bylo τ nekonečné, dle **Königova lemmatu** by obsahovalo nekonečnou větev. Tato větev by byla bezesporná, neboť při konstrukci τ se sporné větve neprodlužují. Pak by ale τ nebylo sporné. \square

Tablo metoda v jazyce s rovností

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností jsou

$$(i) \quad x = x$$

$$(ii) \quad x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

pro každý n -ární funkční symbol f jazyka L .

$$(iii) \quad x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$$

pro každý n -ární relační symbol R jazyka L včetně $=$.

Tablo důkaz z teorie T jazyka L *s rovností* je tablo důkaz z teorie T^* , kde T^* je rozšíření teorie T o axiomy rovnosti pro L (resp. jejich generální uzávěry).

Poznámka V kontextu logického programování má rovnost často jiný význam než v matematice (identita). Např. v Prologu $t_1 = t_2$ znamená, že t_1 a t_2 jsou unifikovatelné.

Kongruence a faktorstruktura

Nechť \sim je ekvivalence na A , $f : A^n \rightarrow A$ a $R \subseteq A^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak \sim je

- **kongruence pro funkci** f , pokud pro každé $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ platí

$$x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n),$$
- **kongruence pro relaci** R , pokud pro každé $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ platí

$$x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n)).$$

Nechť ekvivalence \sim na A je kongruence pro každou funkci i relaci struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ pro jazyk $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. **Faktorstruktura (podílová struktura)** struktury \mathcal{A} dle \sim je struktura $\mathcal{A}/\sim = \langle A/\sim, \mathcal{F}^{A/\sim}, \mathcal{R}^{A/\sim} \rangle$, kde

$$f^{A/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [f^A(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$$

$$R^{A/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) \Leftrightarrow R^A(x_1, \dots, x_n)$$

pro každé $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ a $x_1, \dots, x_n \in A$, tj. funkce a relace jsou definované z \mathcal{A} pomocí **reprezentantů**.

Např. \mathbb{Z}_p je faktorstruktura $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ dle kongruence modulo p .

Význam axiomů rovnosti

Nechť \mathcal{A} je struktura pro jazyk L , ve které je rovnost interpretovaná jako relace $=^A$ splňující axiomy rovnosti, tj. ne nutně identita.

- 1) Z axiomů (i) a (iii) plyne, že relace $=^A$ je **ekvivalence** na A .
- 2) Axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že relace $=^A$ je **kongruence** pro každou funkci a relaci v \mathcal{A} .
- 3) Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, je i $(\mathcal{A}/=^A) \models T^*$, kde $\mathcal{A}/=^A$ je **faktorstruktura** struktury \mathcal{A} dle $=^A$, přičemž rovnost je v $\mathcal{A}/=^A$ interpretovaná jako identita.

Na druhou stranu, v každém modelu, v kterém je rovnost interpretovaná jako identita, všechny axiomy rovnosti evidentně platí.

Korektnost

Řekneme, že struktura \mathcal{A} se **shoduje s položkou** P , pokud P je $T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo pokud P je $F\varphi$ a $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Navíc, \mathcal{A} se **shoduje s větví** V , shoduje-li se s každou položkou na V .

Lemma *Nechť \mathcal{A} je model teorie T jazyka L , který se shoduje s položkou R v kořeni tabla $\tau = \cup \tau_n$ z T . Pak \mathcal{A} lze **expandovat** do jazyka L_C tak, že se shoduje s **nějakou** větví V v tablu τ .*

Poznámka *Postačí nám expanze modelu \mathcal{A} o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ vyskytující se na větví V , ostatní konstanty lze dodefinovat libovolně.*

Důkaz Indukcí dle n nalezneme větev V_n v tablu τ_n a expanzi \mathcal{A}_n modelu \mathcal{A} o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ na V_n tak, že \mathcal{A}_n se shoduje s V_n a $V_{n-1} \subseteq V_n$.

Předpokládejme, že máme větev V_n v τ_n a expanzi \mathcal{A}_n shodující se s V_n .

- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n bez prodloužení V_n , položme $V_{n+1} = V_n$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, necht' V_{n+1} je tato větev a $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi$, shoduje se \mathcal{A}_{n+1} s V_{n+1} .

Korektnost - důkaz (pokr.)

- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n . Z indukčního předpokladu víme, že \mathcal{A}_n se shoduje s P .
- (i) V případě atomického tabla pro spojku položíme $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ a snadno ověříme, že V_n lze prodloužit na větev V_{n+1} shodující se s \mathcal{A}_{n+1} .
- (ii) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$, necht' V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1} , tj. o položku $T\varphi(x/t)$. Necht' \mathcal{A}_{n+1} je libovolná expanze \mathcal{A}_n o nové konstanty z termu t . Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\forall x)\varphi(x)$, platí $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/t)$. Obdobně pro P tvaru $F(\exists x)\varphi(x)$.
- (iii) Je-li P tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$, necht' V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1} , tj. o položku $T\varphi(x/c)$. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\exists x)\varphi(x)$, pro nějaké $a \in A$ platí $\mathcal{A}_n \models \varphi(x)[e(x/a)]$ pro každé ohodnocení e . Necht' \mathcal{A}_{n+1} je expanze \mathcal{A}_n o novou konstantu $c^A = a$. Pak $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/c)$. Obdobně pro P tvaru $F(\forall x)\varphi(x)$.

Základní krok pro $n = 0$ plyne z obdobné analýzy atomických tabel pro položku R v kořeni s využitím předpokladu, že model \mathcal{A} se shoduje s R . □

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda v predikátové logice je *korektní*.

Věta Pro každou teorii T a sentenci φ , je-li φ tablo dokazatelná z T , je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Důkaz

- Necht' φ je tablo dokazatelná z teorie T , tj. existuje sporné tablo τ z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T , tj. existuje model \mathcal{A} teorie T , ve kterém φ neplatí (**protipříklad**).
- Jelikož se \mathcal{A} shoduje s položkou $F\varphi$, dle předchozího lemmatu lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu τ .
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi, F\psi$ pro nějakou sentenci ψ . \square