

Výroková a predikátová logika - XII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/21

Teorie struktury

Mnohdy nás zajímá, co platí v jedné konkrétní struktuře.

Teorie struktury \mathcal{A} je množina $\text{Th}(\mathcal{A})$ **sentencí** (stejného jazyka) platných v \mathcal{A} .

Pozorování Pro každou strukturu \mathcal{A} a teorii T jazyka L ,

- (i) $\text{Th}(\mathcal{A})$ je **kompletní** teorie,
- (ii) je-li $\mathcal{A} \models T$, je $\text{Th}(\mathcal{A})$ jednoduchá (kompletní) **extenze** teorie T ,
- (iii) je-li $\mathcal{A} \models T$ a T je kompletní, je $\text{Th}(\mathcal{A})$ **ekvivalentní** s T ,
tj. $\theta^L(T) = \text{Th}(\mathcal{A})$.

Např. pro $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ **aritmetika přirozených čísel**.

Poznámka Později uvidíme, že ačkoliv je $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ kompletní teorie, je (algoritmicky) **nerozhodnutelná**.

Elementární ekvivalence

- Struktury \mathcal{A} a \mathcal{B} jazyka L jsou *elementárně ekvivalentní*, psáno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí stejné formule (jazyka L), tj. $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$.

Např. $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, ale $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, neboť v $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, zatímco v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ne.

- T je kompletní, právě když má až na el. ekvivalenci právě jeden model.

Např. teorie DeLO hustých lineárních uspořádání bez konců je kompletní.

Zajímá nás, jak vypadají modely dané teorie (až na elementární ekvivalenci).

Pozorování Pro modely \mathcal{A}, \mathcal{B} teorie T platí $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, právě když $\text{Th}(\mathcal{A}), \text{Th}(\mathcal{B})$ jsou *ekvivalentní* (jednoduché kompletní extenze teorie T).

Poznámka Lze-li *efektivně* (algoritmicky) popsat pro efektivně danou teorii T , jak vypadají všechny její kompletní extenze, je T (algoritmicky) *rozhodnutelná*.

Jednoduché kompletní extenze - příklad

Teorie *DeLO** hustého lineárního uspořádání jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností je

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

$$x \leq y \vee y \leq x \quad (\text{dichotomie})$$

$$x < y \rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y) \quad (\text{hustota})$$

$$(\exists x)(\exists y)(x \neq y) \quad (\text{netrivialita})$$

kde ' $x < y$ ' je zkratka za ' $x \leq y \wedge x \neq y$ '.

Označme φ, ψ sentence $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$, resp. $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$. Uvidíme, že

$$DeLO = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}, \quad DeLO^\pm = DeLO^* \cup \{\varphi, \psi\},$$

$$DeLO^+ = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}, \quad DeLO^- = DeLO^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$$

jsou všechny (neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie *DeLO**.

Důsledek Löwenheim-Skolemovy věty

Pomocí kanonického modelu (s rovností) jsme dříve dokázali následující větu.

Věta Necht' T je bezesporná teorie spočetného jazyka L . Je-li L bez rovnosti, má T model, který je *spočetně nekonečný*. Je-li L s rovností, má T model, který je *spočetný*.

Důsledek Ke každé struktuře \mathcal{A} spočetného jazyka *bez rovnosti* existuje *spočetně nekonečná* elementárně ekvivalentní struktura \mathcal{B} .

Důkaz Teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná, neboť má model \mathcal{A} . Dle předchozí věty má spočetně nek. model \mathcal{B} . Jelikož je teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ kompletní, je $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. \square

Důsledek Ke každé *nekonečné* struktuře \mathcal{A} spočetného jazyka *s rovností* existuje *spočetně nekonečná* elementárně ekvivalentní struktura \mathcal{B} .

Důkaz Obdobně jako výše. Jelikož v \mathcal{A} neplatí sentence “existuje právě n prvků” pro žádné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, není \mathcal{B} konečná, tedy je nekonečná. \square

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Řekneme, že těleso \mathcal{A} je *algebraicky uzavřené*, pokud v něm každý polynom (nenulového stupně) má kořen, tj. pro každé $n \geq 1$ platí

$$\mathcal{A} \models (\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0) (\exists y) (y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0)$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$ (\cdot aplikováno $(k - 1)$ -krát).

Např. těleso $\mathbb{C} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je algebraicky uzavřené, zatímco tělesa \mathbb{R} a \mathbb{Q} nejsou (neboť polynom $x^2 + 1$ v nich nemá kořen).

Důsledek Existuje *spočetné algebraicky uzavřené těleso*.

Důkaz Dle předchozího důsledku existuje spočetná struktura (nekonečná), která je elementárně ekvivalentní s tělesem \mathbb{C} , tedy je to rovněž algebraicky uzavřené těleso. \square

Izomorfismus struktur

Nechť \mathcal{A}, \mathcal{B} jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- **Bijekce** $h: A \rightarrow B$ je **izomorfismus** struktur \mathcal{A} a \mathcal{B} , pokud platí zároveň
 - $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$
pro každý n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$,
 - $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$
pro každý n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$.
- \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou **izomorfní** (via h), psáno $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$), pokud existuje izomorfismus h struktur \mathcal{A} a \mathcal{B} . Říkáme rovněž, že \mathcal{A} je **izomorfní s** \mathcal{B} .
- **Automorfismus** struktury \mathcal{A} je izomorfismus \mathcal{A} s \mathcal{A} .

Např. potenční algebra $\mathcal{P}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ s $X = n$ je izomorfní s Booleovou algebrou $\underline{n}2 = \langle {}^n2, -_n, \wedge_n, \vee_n, \mathbf{0}_n, \mathbf{1}_n \rangle$ via $h: A \mapsto \chi_A$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny $A \subseteq X$.

Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

Tvrzení Necht' \mathcal{A}, \mathcal{B} jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. Bijekce $h: A \rightarrow B$ je **izomorfismus** \mathcal{A} a \mathcal{B} , právě když platí zároveň

- (i) $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$ pro každý term t a $e: \text{Var} \rightarrow A$,
- (ii) $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$ pro každou formuli φ a $e: \text{Var} \rightarrow A$.

Důkaz (\Rightarrow) Indukcí dle struktury termu t , respektive formule φ .

(\Leftarrow) Dosazením termu $f(x_1, \dots, x_n)$ do (i) či atomické formule $R(x_1, \dots, x_n)$ do (ii) pro ohodnocení $e(x_i) = a_i$ máme, že h vyhovuje def. izomorfismu. \square

Důsledek Pro každé struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} stejného jazyka,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Poznámka Obrácená implikace **obecně** neplatí, např. $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, ale $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, neboť $|\mathbb{Q}| = \omega$ a $|\mathbb{R}| = 2^\omega$.

Konečné modely s rovností

Tvrzení Pro každé *konečné* struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} stejného jazyka s *rovností*,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

Důkaz Je $|A| = |B|$, neboť lze vyjádřit “*existuje právě n prvků*”.

- Nechť \mathcal{A}' je expanze \mathcal{A} do jazyka $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$ o **jména prvků** z A .
- Ukážeme, že \mathcal{B} lze expandovat na \mathcal{B}' do jazyka L' tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Pak zřejmě $h: a \mapsto c_a^{B'}$ je izomorfismus \mathcal{A}' s \mathcal{B}' a tedy i izomorfismus \mathcal{A} s \mathcal{B} .
- Stačí ukázat, že pro každé $c_a^{A'} = a \in A$ existuje $b \in B$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
- Označme Ω množinu formulí $\varphi(x)$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$.
- Jelikož je A konečné, existuje konečně formulí $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každé $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ pro nějaké i .
- Jelikož $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i$, existuje $b \in B$ t.ž. $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i[e(x/b)]$.
- Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$. \square

Důsledek Má-li *kompletní* teorie jazyka s *rovností* *konečný* model, jsou všechny její modely *izomorfní*.

Definovatelnost a automorfismy

Množina definovaná formulí $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b} \in A^{|\bar{y}|}$ ve struktuře \mathcal{A} je

$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}.$$

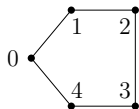
Tvrzení *Nechť $D \subseteq A^n$ je množina definovatelná ve struktuře \mathcal{A} z parametrů \bar{b} a h je automorfismus \mathcal{A} , který je identický na \bar{b} . Pak $h[D] = D$.*

Důkaz *Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$. Pak pro každé $\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}$*

$$\bar{a} \in D \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D.$$

Např. graf \mathcal{G} má právě jeden netriviální automorfismus h zachovávající vrchol 0.



$$h(0) = 0, \quad h(1) = 4, \quad h(2) = 3, \quad h(3) = 2, \quad h(4) = 1$$

$$\{0\} = (x = y)^{\mathcal{G}, 0}, \quad \{1, 4\} = (E(x, y))^{\mathcal{G}, 0}, \quad \{2, 3\} = (x \neq y \wedge \neg E(x, y))^{\mathcal{G}, 0}$$

Navíc množiny $\{0\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ jsou definovatelné z parametru 0. Tedy

$$Df^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}.$$

Kategoričnost

- *Izomorfní spektrum* teorie T je počet $I(\kappa, T)$ navzájem neizomorfních modelů teorie T pro každou **kardinalitu** κ .
- Teorie T je κ -**kategoričná**, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality κ , tj. $I(\kappa, T) = 1$.

Tvrzení Teorie DeLO (tj. “bez konců”) je ω -kategoričná.

Důkaz Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DeLO}$ s $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}, B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Indukcí dle n lze nalézt prosté **parciální** funkce $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$ **zachovávající uspořádání** tak, že $\{a_i\}_{i < n} \subseteq \text{dom}(h_n)$ a $\{b_i\}_{i < n} \subseteq \text{rng}(h_n)$. Pak $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \cup h_n$. \square

Obdobně dostaneme, že např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle, \mathcal{A} \upharpoonright (0, 1], \mathcal{A} \upharpoonright [0, 1), \mathcal{A} \upharpoonright [0, 1]$ jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie DeLO . Pak*

$$I(\kappa, \text{DeLO}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

ω -kategorické kritérium kompletnosti

Věta *Nechť jazyk L je spočetný.*

- (i) Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti ω -kategorická, je kompletní.*
- (ii) Je-li teorie T jazyka L s rovností ω -kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.*

Důkaz Každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem T , ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely T jsou elementárně ekvivalentní, tj. T je kompletní. \square

Např. teorie $DeLO$, $DeLO^+$, $DeLO^-$, $DeLO^\pm$ jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^$.*

Poznámka *Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než ω .*

Axiomatizovatelnost

Zajímá nás, zda se daná část světa dá “dobře” popsat.

Nechť $K \subseteq M(L)$ je třída struktur jazyka L . Řekneme, že K je

- **axiomatizovatelná**, pokud existuje teorie T jazyka L s $M(T) = K$,
- **konečně axiomatizovatelná**, pokud je axiomatizovatelná **konečnou** teorií,
- **otevřeně axiomatizovatelná**, pokud je axiomatizovatelná **otevřenou** teorií,
- **teorie T je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná**, pokud $M(T)$ je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

Pozorování *Je-li K axiomatizovatelná, je uzavřená na elem. ekvivalenci.*

Například

- lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,*
- tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,*
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.*

Důsledek kompaktnosti

Věta *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, má i nekonečný model.*

Důkaz V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$ extenzi teorie T v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů c_i .
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie T' model.
- Tedy dle věty o **kompaktnosti** má T' model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie T . □

Důsledek *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.*

Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie T jazyka s rovností je axiomatizovatelná.