

# Výroková a predikátová logika - dodatek

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/2021

# Množinové pojmy

Veškeré pojmy zavádíme v rámci **teorie množin** pouze pomocí predikátu náležení a rovnosti (a prostředků logiky).

- Množinová vlastnost  $\varphi(x)$  definuje **třídu**  $\{x \mid \varphi(x)\}$ . Třída, která není množinou, se nazývá **vlastní**, např.  $\{x \mid x = x\}$ .
- $x \notin y$ ,  $x \neq y$  jsou zkratkou za  $\neg(x \in y)$ ,  $\neg(x = y)$ .
- $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  označuje množinu obsahující právě  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ,  $\{x\}$  se nazývá **singleton**,  $\{x, y\}$  **neuspořádaná dvojice**.
- $\emptyset$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$ ,  $\Delta$  značí **prázdnou množinu**, **sjednocení**, **průnik**, **rozdíl**, **symetrický rozdíl** množin, např.

$$x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x) = \{z \mid (z \in x \wedge z \notin y) \vee (z \notin x \wedge z \in y)\}$$

- $x, y$  jsou **disjunktní** pokud  $x \cap y = \emptyset$ .  $x \subseteq y$  značí, že  $x$  je **podmnožinou**  $y$ .
- **Potenční množina** (**potence**)  $x$  je  $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$ .
- **Sjednocení** (**suma**)  $x$  je  $\bigcup x = \{z \mid \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$ .
- **Pokrytí** množiny  $x$  je množina  $y \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$  s  $\bigcup y = x$ . Jsou-li navíc každé dvě (různé) množiny v  $y$  disjunktní, je  $y$  **rozklad**  $x$ .

# Relace

- uspořádaná dvojice** je  $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$ , tedy  $(x, x) = \{x, \{x\}\}$ ,  
**uspořádaná  $n$ -tice** je  $(x_0, \dots, x_{n-1}) = ((x_0, \dots, x_{n-2}), x_{n-1})$  pro  $n > 2$ ,
- kartézský součin** je  $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ ,  
**kartézská mocnina** je  $x^0 = \{\emptyset\}$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^n = x^{n-1} \times x$  pro  $n > 1$ ,
- disjunktní sjednocení** je  $x \uplus y = (\{\emptyset\} \times x) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times y)$ ,
- relace** je jakákoliv množina  $R$  uspořádaných dvojic,  
 namísto  $(x, y) \in R$  píšeme obvykle  $R(x, y)$  nebo  $x R y$ ,  
**definiční obor (doména)**  $R$  je  $\text{dom}(R) = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$ ,  
**obor hodnot**  $R$  je  $\text{rng}(R) = \{y \mid \exists x (x, y) \in R\}$ ,  
**extenze** prvku  $x$  v  $R$  je  $R[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$ ,  
**inverzní relace** k  $R$  je  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ ,  
**restrikce**  $R$  na množinu  $z$  je  $R \upharpoonright z = \{(x, y) \in R \mid x \in z\}$ ,
- složení** relací  $R$  a  $S$  je relace  $R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$ ,
- identita** na množině  $z$  je relace  $\text{Id}_z = \{(x, x) \mid x \in z\}$ .

# Ekvivalence

- Relace  $R$  je **ekvivalence** na  $X$ , pokud pro všechna  $x, y, z \in X$  platí

$$R(x, x) \quad (\text{reflexivita})$$

$$R(x, y) \rightarrow R(y, x) \quad (\text{symetrie})$$

$$R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z) \quad (\text{tranzitivita})$$

- $R[x]$  se nazývá **třída ekvivalence** (**faktor**) prvku  $x$  dle  $R$ , značíme  $[x]_R$ .
- $X/R = \{R[x] \mid x \in X\}$  je **faktoriace** množiny  $X$  dle  $R$ .
- Platí, že  $X/R$  je rozklad  $X$ , neboť třídy jsou disjunktní a pokrývají  $X$ .
- Naopak, je-li  $S$  rozklad  $X$ , určuje ekvivalenci (na  $X$ )

$$\{(x, y) \mid x \in z, y \in z \text{ pro nějaké } z \in S\}.$$

# Uspořádání

Nechť  $\leq$  je relace na množině  $X$ . Řekneme, že  $\leq$  je

- **částečné uspořádání** (množiny  $X$ ), pokud pro všechna  $x, y, z \in X$

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

- **lineární (totální) uspořádání**, pokud navíc pro všechna  $x, y \in X$

$$x \leq y \vee y \leq x \quad (\text{dichotomie})$$

- **dobré uspořádání**, pokud navíc každá neprázdna podmnožina  $X$  obsahuje *nejmenší* prvek.

Označme ' $x < y$ ' za ' $x \leq y \wedge x \neq y$ '. Lineární uspořádání  $\leq$  na  $X$  je

- **husté uspořádání**, pokud  $X$  není singleton a pro všechna  $x, y \in X$

$$x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y) \quad (\text{hustota})$$

# Funkce

Relace  $f$  je **funkce**, pokud pro každé  $x \in \text{dom}(f)$  existuje jediné  $y$  s  $(x, y) \in f$ .

- Pak říkáme, že  $y$  je **hodnotou** funkce  $f$  v  $x$ , píšeme  $f(x) = y$ ,
- $f: X \rightarrow Y$  značí, že  $f$  je funkce s  $\text{dom}(f) = X$  a  $\text{rng}(f) \subseteq Y$ ,
- funkce  $f$  je **na** (**surjektivní**)  $Y$ , pokud  $\text{rng}(f) = Y$ ,
- funkce  $f$  je **prostá** (**injektivní**), pokud pro všechna  $x, y \in \text{dom}(f)$

$$x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- $f: X \rightarrow Y$  je **bijekce**  $X$  a  $Y$ , je-li prostá a na  $Y$ ,
- je-li  $f: X \rightarrow Y$  prostá, pak  $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$  je **inverzní funkce**,
- **obraz** množiny  $A$  přes  $f$  je  $f[A] = \{y \mid (x, y) \in f \text{ pro nějaké } x \in A\}$ ,
- je-li  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$ , pak pro jejich **složení** platí  $(f \circ g): X \rightarrow Z$  a

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

- ${}^X Y$  značí množinu všech funkcí z  $X$  do  $Y$ .

# Čísla

Uvedeme příklady explicitních konstrukcí.

- **Přirozená čísla** definujeme induktivně vztahem  $n = \{0, \dots, n - 1\}$ , tedy

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots$$

- množina **přirozených** čísel  $\mathbb{N}$  je definována jako nejmenší množina obsahující  $\emptyset$  uzavřená na  $S(x) := x \cup \{x\}$  (**následník**).
- množina **celých** čísel je  $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ , kde  $\sim$  je ekvivalence definovaná

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ právě když } a + d = b + c$$

- množina **racionálních** čísel je  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \approx$ , kde  $\approx$  je dána

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ právě když } a \cdot d = b \cdot c$$

- množina **reálných** čísel  $\mathbb{R}$  je množina **řezů** racionálních čísel, tj. netriviálních, dolů uzavřených podmnožin  $\mathbb{Q}$  bez **největšího** prvku. ( $A \subset \mathbb{Q}$  je **dolů uzavřená**, pokud  $y < x \in A$  implikuje  $y \in A$ .)

# Velikosti množin

- $x$  má **stejnou nebo menší velikost** než  $y$  ( $x$  je **subvalentní**  $y$ ),  
pokud existuje prostá funkce  $f: x \rightarrow y$ ,  $(x \preceq y)$
- $x$  má **stejnou velikost** jako  $y$ , existuje-li bijekce  $f: x \rightarrow y$ ,  $(x \approx y)$
- $x$  má **menší velikost** než  $y$ , pokud  $x \preceq y$  a není  $x \approx y$ ,  $(x \prec y)$

**Věta (Cantor)**  $x \prec \mathcal{P}(x)$  pro každou množinu  $x$ .

**Důkaz**  $f(y) = \{y\}$  pro  $y \in x$  je prostá funkce  $f: x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ , tedy  $x \preceq \mathcal{P}(x)$ .

Pro spor předpokládejme, že existuje prostá  $g: \mathcal{P}(x) \rightarrow x$ . Definujme

$$y = \{g(z) \mid z \subseteq x \wedge g(z) \notin z\}$$

Dle definice,  $g(y) \in y$  právě když  $g(y) \notin y$ , spor.  $\square$

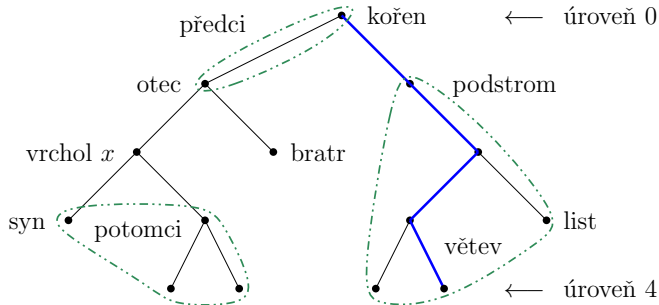
- pro každé  $x$  existuje **kardinální číslo**  $\kappa$  s  $x \approx \kappa$ , značíme  $|x| = \kappa$ ,
- $x$  je **konečná**, pokud  $|x| = n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ , jinak je **nekonečná**,
- $x$  je **spočetná**, pokud je konečná nebo  $|x| = |\mathbb{N}| = \omega$ ; jinak je **nespočetná**,
- $x$  má **mohutnost kontinua**, pokud  $|x| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ .



## $n$ -ární relace a funkce

- Relace **arity** (**četnosti**)  $n \in \mathbb{N}$  na  $X$  je libovolná množina  $R \subseteq X^n$ , tedy pro  $n = 0$  je  $R = \emptyset = 0$  nebo  $R = \{\emptyset\} = 1$ , pro  $n = 1$  je  $R \subseteq X$ ,
- (Částečná) funkce **arity** (**četnosti**)  $n \in \mathbb{N}$  z  $X$  do  $Y$  je libovolná funkce  $f \subseteq X^n \times Y$ . Řekneme, že  $f$  je **totální** na  $X^n$ , pokud  $\text{dom}(f) = X^n$ , značíme  $f: X^n \rightarrow Y$ . Je-li navíc  $Y = X$ , je to **operace** na  $X$ .
- Funkce  $f: X^n \rightarrow Y$  je **konstantní**, pokud  $\text{rng}(f) = \{y\}$  pro nějaké  $y \in Y$ , pro  $n = 0$  je  $f = \{(\emptyset, y)\}$  a  $f$  ztotožňujeme s **konstantou**  $y$ .
- Aritu relace či funkce značíme  $\text{ar}(R)$  či  $\text{ar}(f)$  a mluvíme o **nulárních**, **unárních**, **binárních**, obecně  **$n$ -árních** relacích a funkcích (operacích).

# Stromy



- **Strom** je množina  $T$  s částečným uspořádáním  $<_T$ , ve kterém existuje (jedinečný) **nejmenší** prvek, zvaný **kořen**, a množina předků libovolného prvku je **dobře uspořádaná**,
- **větev** stromu  $T$  je **maximální** lineárně uspořádaná podmnožina  $T$ ,
- adoptujeme standardní terminologii o stromech z teorie grafů, pak např.  
**větev v konečném stromu je cesta z kořene do listu.**

# Königovo lemma

Budeme pracovat (*pro jednoduchost*) obvykle s konečně větvíci se stromy, ve kterých má každý vrchol kromě kořene **bezprostředního** předka (*otce*).

- *n-tá úroveň* stromu  $T$  pro  $n \in \mathbb{N}$  je daná indukci, obsahuje syny vrcholů z  $(n - 1)$ -ní úrovně, 0-tá úroveň obsahuje právě kořen,
- *hloubka* stromu  $T$  je maximální číslo  $n \in \mathbb{N}$  neprázdné úrovně; pokud má  $T$  nekonečnou větev, je *hloubka nekonečná* či  $\omega$ .
- strom  $T$  je *n-ární* pro  $n \in \mathbb{N}$ , pokud každý vrchol má **nejvýše**  $n$  synů. Je *konečně větvíci se*, má-li každý vrchol konečně mnoho synů.

**Lemma (König)** *Každý nekonečný, konečně větvíci se strom  $T$  obsahuje nekonečnou větev.*

*Důkaz* Hledání nekonečné větve začneme v kořeni. Jelikož má jen konečně mnoho synů, existuje syn s nekonečně mnoha potomky. *Vybereme* ho a stejně pokračujeme v jeho podstromě. Takto získáme nekonečnou větev. □

# Uspořádané stromy

- *Uspořádaný strom* je strom  $T$ , s kterým je dáno lineární uspořádání synů každého vrcholu, toto uspořádání se nazývá *pravolevé* a značí  $<_L$ . Oproti tomu, uspořádání  $<_T$  se nazývá *stromové*.
- *značený strom* je strom  $T$  s libovolnou funkcí (*značící funkce*), která každému vrcholu  $T$  přiřazuje nějaký objekt (*značku*).
- značené uspořádané stromy např. zachycují strukturu formulí

