Řešení testu 7.1. 2021

pozn: červené jsou komentáře, které v řešení být nemusí, ale můžeme se na to zeptat.

1) a)
φ_1: $p_1 \leftrightarrow \neg p_2 \wedge \neg p_3$
φ_2: $p_2 \leftrightarrow \neg p_3$
φ_3: $p_3 \leftrightarrow \neg p_1$

b)
$\varphi_1 \sim (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$
$\varphi_2 \sim (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_2 \vee p_3)$
$\varphi_3 \sim (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$

$S = \{\{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_3\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{\neg p_2, \neg p_3\}, \{p_2, p_3\}, \{\neg p_1, \neg p_3\},$
$\{p_1, p_3\}, \{\neg p_3\}\}$

negace, neboť chceme dokázat p_3

c)
$\{p_2, p_3\}$ $\{\neg p_1, \neg p_2\}$
$\{\neg p_1, p_3\}$ $\{p_1, p_3\}$
$\{p_3\}$ $\{\neg p_3\}$
$\square$

d) ANO, zamítnutí v c) je LI-rezoluce.

e) ANO, teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je kompletní. Z c) máme $T \models p_3$, z φ_2, φ_3 pak $T \models \neg p_1, \neg p_2$. Nejstarší tedy odpoví stejně, nejmladší opačně než prostřední.

3) a)
i) $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{A} \models x = abs(x)\}$ je definovatelná v $\mathcal{A}$

ii) $\{1\}$ není definovatelná v $\mathcal{A}$, neboť není invariantní např. na automorfismus f struktury $\mathcal{A}$ daný:

$f(\{1\}) \neq \{1\}$

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(-1) = -2$, $f(-2) = -1$, $f(x) = x$ jinak.

aby f zachoval $abs^{\mathcal{A}}$

b) NENÍ, např. $\mathcal{A} \not\models (\forall x)(x = abs(x))$ ale $\mathcal{B} \models (\forall x)(x = abs(x))$.
Tedy sentence $(\forall x)(x = abs(x))$ platí v $Th(\mathcal{B})$ a neplatí v $Th(\mathcal{A})$.

2 a) $F(\exists x)(P(x)\to R(x))$

$T(\exists x)(P(x)\to Q(x))$

$T\,P(c_0)\to Q(c_0)$ $\qquad c_0$ nová

$T(\exists x)(\neg R(x)\to\neg Q(x))$

$T\,\neg R(c_1)\to\neg Q(c_1)$ $\qquad c_1$ nová

$F(\exists x)(P(x)\to R(x))$

$F\,P(c_0)\to R(c_0)$

$TP(c_0)$

$FR(c_0)$

$F(\exists x)(P(x)\to R(x))$

$F\,P(c_1)\to R(c_1)$

$TP(c_1)$

$FR(c_1)$

- $FP(c_0)$
  - ⊗
- $TQ(c_0)$
  - $F\neg R(c_1)$
    - $TR(c_1)$
    - ⊗
  - $T\neg Q(c_1)$
    - $FQ(c_1)$
    - $F(\exists x)(P(x)\to R(x))$
    - $FP(c_2)\to R(c_2)$
    - $TP(c_2)$
    - $FR(c_2)$
    - ⋮

značí nekonečnou větev, jsou na ní (redukované!) položky $FP(c_i)\to R(c_i)$ pro všechny pomocné symboly c_i.

univerzum tvoří všechny konstantní termy jazyka L_C

b) $\mathcal{A}=\langle A=\{c_0,c_1,\dots\},\ P^A=A,\ R^A=\emptyset,\ Q^A=\{c_0\}\rangle$

(po redukci na jazyk L, tj. bez $c_i^A=c_i$ pro každé i.)

c) φ není dokazatelná z T, viz a) (rovněž $\mathcal{A}\not\models\varphi$.) Zároveň φ není zamítnutelná z T, neboť např. $\mathcal{B}\models\varphi$, kde $\mathcal{B}$ je model T:

$\mathcal{B}=\langle \underbrace{\{c_0\}}_{B},\ P^A=\emptyset,\ R^A=B,\ Q^A=B\rangle$.

$\Rightarrow$ φ nezávislá v T.

d) NEMÁ. T není kompletní, viz b). Kompletní extenze T by tedy nebyla konzervativní.

(dokazovala by φ či $\neg\varphi$)