

Zkouška VPL - písemná část

7. ledna 2021

1. Mějme tři bratry, přičemž o každém víme, že buď vždy říká pravdu anebo vždy lže.

- (i) Nejstarší říká: “*Oba mí bratři jsou lháři.*”
- (ii) Prostřední říká: “*Nejmladší je lhář.*”
- (iii) Nejmladší říká: “*Nejstarší je lhář.*”

Nechť prvovýroky p_1, p_2, p_3 reprezentují (po řadě), že “*nejstarší / prostřední / nejmladší bratr je pravdomluvný*” a označme $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

- (a) Napište výroky (ve tvaru ekvivalence) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad \mathbb{P} reprezentující znalosti vyplývající (po řadě) z (i), (ii), (iii). (2b)
 - (b) Napište teorii S v množinové reprezentaci vzniklou převodem $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, p_3$ či jejich negací na CNF, která je nespílitelná, právě když z tvrzení (i), (ii), (iii) plyne, že “*nejmladší je pravdomluvný*”. (2b)
 - (c) Rezolucí ukažte, že S je nespílitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. (3b)
 - (d) Je $S \vdash_{LI} \square$? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (e) Odpoví-li nám prostřední bratr na otázku: “*Složil už někdo z vás zkoušku z logiky?*”, budeme vědět, jak na tutéž otázku odpoví ostatní bratři? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Nechť $T = \{(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)(\neg R(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R \rangle$ bez rovností, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\exists x)(P(x) \rightarrow R(x))$.
- (a) Zkonstruuje dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. (3b)
 - (b) Z bezesporné větve tohoto tabla sestrojte kanonický model \mathcal{A} teorie T , ve kterém φ neplatí. (2b)
 - (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte příklad nebo zdůvodněte, proč ne. (2b)
3. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \text{abs}^A \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle \text{abs} \rangle$ s rovností, kde abs je unární funkční symbol a abs^A je funkce absolutní hodnoty v \mathbb{Z} .
- (a) Naleznete příklady (i) netriviální (t.j. jiné než \emptyset a \mathbb{Z}) množiny definovatelné v \mathcal{A} bez parametrů a (ii) množiny nedefinovatelné v \mathcal{A} bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \text{id} \rangle$ je struktura stejného jazyka, kde id je identita. Je $\text{Th}(\mathcal{A})$ extenzí $\text{Th}(\mathcal{B})$? Uveďte zdůvodnění. (2b)