

Zkouška VPL - písemná část

9. června 2021

1. Které z následujících odpovědí jsou správné odpovědi na *tuto* otázku?

- 1) *Všechny následující.*
- 2) *Žádná z následujících.*
- 3) *Všechny předchozí.*
- 4) *Aspoň jedna z předchozích.*
- 5) *Žádná z předchozích.*

- (a) Vyjádřete tyto možnosti jako výroky $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ **ve tvaru ekvivalence** nad množinou $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kde prvovýrok i znamená, že “odpověď i je správná.” (2b)
- (b) Převeďte uvedené výroky do CNF a napište teorii $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_5\}$ v množinové reprezentaci. (2b)
- (c) Rezolucí dokažte, že $T \models 5$. Rezoluční důkaz znázorněte rezolučním stromem. (3b)
- (d) Je teorie T nad \mathbb{P} kompletní? Odpověď zdůvodněte. (1b)
- (e) Uvažme nyní případ, že v seznamu možných odpovědí je navíc:

- 6) *Žádná z předchozích.*

Označme T' příslušnou teorii nad $\mathbb{P}' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kterou dostaneme stejným postupem jako teorii T z původního seznamu možných odpovědí. Je T' extenzí teorie T ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (Axiomy T' nemusíte vypisovat.) (2b)

2. Nechť $T = \{(\exists x)P(x, x), (\forall x)(\exists y)R(x, y), (\forall u)(\forall v)(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow \neg P(u, v))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou binární relační symboly.

- (a) Skolemizací nalezněte k T ekvivalentní teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
- (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespílitelná. (3b)
- (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
- (d) Je sentence $(\forall x)P(x, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T ? Odpovědi zdůvodněte. (2b)

3. Buď $T = \{\neg(\exists x)(f(x) = x), f(x) = f(y) \rightarrow x = y, \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a axiom φ vyjadřuje “*Existuje nejvýše 5 prvků.*”

- (a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich a zdůvodněte, že jsou neekvivalentní. (3b)
- (b) Je teorie $S = \{(\forall x)\neg(f(x) = x), (\forall x)(\exists y)(f(y) = x), \varphi\}$ extenzí teorie T ? Je T extenzí S ? Odpovědi zdůvodněte. (2b)