

Zkouška VPL - písemná část

21. ledna 2021

1. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskretních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

- (i) Zdravé číslo onemocní, právě když je přesně jedno sousední číslo nemocné (v předchozím čase).
- (ii) Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).
- (iii) V čase 0 bylo nemocné číslo 0, ostatní čísla byla zdravá.

(Sousedními čísly čísla i myslíme $i - 1$ a $i + 1$, předchozím číslem myslíme $i - 1$.)

- (a) Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení (i), (ii), (iii) nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že “číslo i je v čase t nemocné.” (2b)
 - (b) Převed'te axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nespíitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj. “číslo 1 je zdravé v čase 2”. Pozn: stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3 , ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule. (2b)
 - (c) Rezolucí dokažte, že S je nespíitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. (3b)
 - (d) Uvažme nyní teorie $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ a $T' = T_1 \cup T_2' \cup T_3$, kde T_2' vyjadřuje (nad \mathbb{P}):
 - (ii') Nemocné číslo se uzdraví, jestliže je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).Je některá z teorií T, T' extenzí druhé teorie? A pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (Pozn: není nutné psát axiomy teorie T_2' .) (2b)
 - (e) Uveďte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T' anebo ukažte, že takové extenze neexistují. (2b)
2. Nechť $T = \{\neg(\forall x)P(x, x), (\forall x)\neg(\forall y)Q(x, y), (\forall x)\neg(\forall y)(\neg P(x, x) \wedge (\exists z)\neg Q(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q jsou binární relační symboly.
- (a) Skolemizací nalezněte k T ekvispíitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespíitelná. (3b)
 - (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespíitelná. Nápověda: využijte tablo z (b). (2b)
 - (d) Má teorie T jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Bud' $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.
- (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$. (2b)
 - (b) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)