Zkouška VPL - písemná část

1. Nechť $T = \{p,\ r \to p,\ q \leftrightarrow \neg r,\ s \to q\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.

   (a) Pomocí implikačního grafu ukažte, že T je splnitelná. *(2b)*

   (b) Určete všechny modely teorie T a axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v CNF. *(2b)*

   (c) Tablo metodou dokažte, že $T \models r \to \neg s \wedge p$. *(2b)*

   (d) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních teorií T' nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ takových, že teorie T je extenzí T'. Kolik z nich je kompletních? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Víme, že:

   (i) Každý zná sám sebe.

   (ii) Když člověk studuje na škole, musel se na ni hlásit a ta škola ho přijala.

   (iii) Alfons se nehlásil na školu, která přijala někoho, kdo Alfonse zná.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   (iv) Alfons nestuduje na žádné škole.

   Konkrétně:

   (a) Tvrzení (i) až (iv) vyjádřete <u>sentencemi</u> φ_1 až φ_4 jazyka $L = \langle H, S, P, Z, a \rangle$ bez rovnosti, kde H, S, P, Z jsou binární relační symboly a $H(x, y)$, $S(x, y)$ a $P(x, y)$, $Z(x, y)$ po řadě značí, že "x se hlásí na / studuje / přijala / zná y", a a je konstantní symbol označující Alfonse. *(2b)*

   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \varphi_4$. Převeďte T do množinové reprezentace. *(2b)*

   (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(3b)*

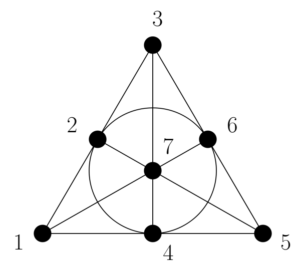
   (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie T, která je nesplnitelná. *(2b).*

   (e) Je $T \vdash_{LI} \square$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle T \rangle$ s rovností, kde T je ternární relační symbol, s axiomy:

$$T(x,y,z) \to x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z$$
$$T(x,y,z) \to T(y,x,z) \wedge T(y,z,x) \wedge T(z,y,x) \wedge T(z,x,y) \wedge T(x,z,y)$$
$$x \neq y \to (\exists z)(T(x,y,z) \wedge (\forall u)(T(x,y,u) \to u = z))$$

(Pozn: Pak každý model teorie T tvoří tzv. Steinerův systém trojic*, v našem případě uspořádaných).* Uvažme model $\mathcal{F} = \langle \{1,2,\ldots,7\}, T^F \rangle$ teorie T na obrázku (tzv. *Fanova rovina*), kde každá "přímka" reprezentuje trojici prvků, jež jsou v relaci T^F v libovolném pořadí, tedy $T^F = \{(2,4,6),(6,2,4),\ldots\}$.



(a) Nalezněte co nejmenší množinu parametrů A, která v modelu $\mathcal{F}$ umožňuje definovat libovolný jeho prvek (formulí jazyka L). Pro každý prvek napište příslušnou definující formuli (s dosazenými parametry). Zdůvodněte, proč je A nejmenší možná. *(3b)*

(b) Jsou teorie $T' = T \cup \{f(x,y) = z \leftrightarrow T(x,y,z)\}$ a $T'' = T \cup \{f(x,y) = z \leftrightarrow T(x,y,z) \vee (x = y \wedge y = z)\}$, kde f je nový binární funkční symbol, (korektními) extenzemi teorie T o definici? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*