

Zkouška VPL – písemná část

17. února 2021

1. Tonia a Fabio nám popisují svůj nejnovější recept na nejlepší pizzu na světě.

- Tonia řekla: “Do receptu patří ančovičky nebo bazalka nebo česnek.”
- Tonia také řekla: “Jestli tam nepatří dušená šunka, nepatří tam ani bazalka.”
- Fabio řekl: “Do receptu patří dušená šunka.”
- Fabio dále řekl: “Nepatří tam ančovičky ani bazalka, ale patří tam česnek.”

Víme, že Tonia vždy mluví pravdu, zatímco Fabio vždy lže.

- (a) Vyjádřete naše znalosti jako výrokovou teorii T v jazyce $L = \langle a, b, c, d \rangle$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam “do receptu patří ančovičky/bazalka/česnek/dušená šunka”. (2b)
- (b) Pomocí rezoluční metody dokažte, že z teorie T vyplývá, že “do receptu patří ančovičky”. Nakreslete rezoluční strom. (3b)
- (c) Lze totéž dokázat LI-rezolucí? Zdůvodněte. (2b)
- (d) Axiomatizujte teorii T výrokem v DNF. (1b)
- (e) Určete počet výroků (až na logickou ekvivalenci) v jazyce L *nezávislých* v teorii T . (2b)
2. Nechť $T = \{(\exists x)(\neg P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)), Q(a)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R, a \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly a a je konstantní symbol, a označme jako φ sentenci $(\exists x)(R(x) \rightarrow P(x))$.
- (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni (3b)
- (b) Z bezesporné větve předchozího tabla sestrojte model \mathcal{A} teorie T , ve kterém φ neplatí. (2b)
- (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T ? Zdůvodněte. (2b)
- (d) Má teorie T úplnou konzervativní extenzi? Uveďte příklad nebo zdůvodněte, proč ne. (2b)
3. Buď $T = \{E(x, x), E(c, x), (E(x, y) \wedge E(y, z)) \rightarrow E(x, z), (E(x, y) \wedge E(y, x)) \rightarrow x = y, \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E, c \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol, c je konstantní symbol, a φ vyjadřuje, že “existuje právě pět prvků”. Buď L' rozšíření jazyka L o nový binární funkční symbol f a uvažme následující formuli:

$$\psi = (\forall x)(\forall y)(E(f(x, y), x) \wedge E(f(x, y), y))$$

- (a) Najděte nějaké bezesporné extenze T_1, T_2 teorie T v jazyce L' takové, že $T_1 \models \psi$ a $T_2 \models \neg\psi$, pokud existují, nebo zdůvodněte, proč neexistují. (3b)
- (b) Má teorie T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L' , ve které platí ψ ? Zdůvodněte. (2b)