

## Zkouška VPL – písemná část

19. února 2021

1. Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře - červené, zelené a modré. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: “Cesta ven je za těmito dveřmi.”
- Zelené dveře: “Cesta ven není za modrými dveřmi.”
- Modré dveře: “Cesta ven není za těmito dveřmi.”

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý.

- Vyjádřete naše znalosti jako výrokovou teorii  $T$  nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{c, z, m\}$ , kde  $c/z/m$  značí, že “cesta ven je za červenými/zelenými/modrými dveřmi.” (2b)
- Pomocí tablo metody dokažte, že cesta ven je za zelenými dveřmi. (3b)
- Je teorie  $T$  extenzí teorie  $S = \{m \rightarrow z\}$  nad  $\mathbb{P}' = \{z, m\}$ ? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte. (2b)
- Určete počet výroků (až na logickou ekvivalenci) v jazyce  $\mathbb{P}$ , které jsou pravdivé v teorii  $T$  a (zároveň) nezávislé v teorii  $S$ . (2b)

2. Nechť  $T = \{(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\forall x)(\exists y)(\neg R(x) \vee (\forall x)P(y, x))\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti, kde  $P$  je binární relační symbol a  $R$  je unární relační symbol. Označme jako  $\varphi$  formuli  $(\forall x)(\neg R(x))$ .

- Pomocí převodu na prenexní tvar a skolemizace najděte otevřenou teorii  $T'$ , která je sporná, právě tehdy, když v teorii  $T$  je dokazatelná formule  $\varphi$ . (2b)
- Převeďte teorii  $T'$  na ekvivalentní teorii  $S$  v CNF. Zapište  $S$  v množinové reprezentaci. (1b)
- Pomocí rezoluce ukažte, že  $S$  je nespílitelná. Rezoluční odvození znázorněte rezolučním stromem, u každého kroku uveďte použitou unifikaci. (3b)
- Najděte konjunkci základních instancí axiomů teorie  $T'$ , která je nespílitelná. (2b)
- Má teorie  $T'$  úplnou konzervativní extenzi? Uveďte příklad nebo zdůvodněte, proč ne. (2b)

3. Nechť

$$T = \{f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z), f(a, x) = x, f(x, a) = x, f(x, g(x)) = a, f(g(x), x) = a\}$$

je teorie v jazyce  $L = \langle f, g, a \rangle$  s rovností, kde  $f$  je binární funkční symbol,  $g$  unární funkční symbol a  $a$  je konstantní symbol.

- Nalezněte model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$ , ve kterém formule  $(\forall x)(\forall y)f(x, y) = f(y, x)$  platí. Nalezněte model  $\mathcal{B}$  teorie  $T$ , ve kterém stejná formule neplatí. (2b)
- Je každá podstruktura každého modelu teorie  $T$  také model teorie  $T'$ ? Zdůvodněte. (2b)
- Nechť  $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  je struktura racionálních čísel se standardními operacemi. Najděte redukt  $\underline{\mathbb{Q}}$ , který je modelem  $T$ . (1b)