

Zkouška VPL - písemná část

25. února 2021

1. Nechť $T = \{(\neg p \wedge q) \rightarrow r, (q \rightarrow r) \leftrightarrow p\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
 - (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie T . (3b)
 - (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a také výrokem v CNF. (2b)
 - (c) Je T extenzí teorie $S = \{q \rightarrow p\}$ nad $\{p, q\}$? Je T konzervativní extenzí S ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Určete, kolik je navzájem neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} , které jsou nezávislé v S i v T . Uveďte zdůvodnění. (2b)

2. Víme, že:

- (i) Aristoteles je Řek, César je Říman a Didó je Kartáginka.
- (ii) Žádný Řek není Říman.
- (iii) Žádný Kartáginec není Řek.
- (iv) V Kartágu se narodili pouze Kartáginci.

Pozn: Nerozlišujeme Kartáginky a Kartágince. Pomocí rezoluce chceme dokázat, že

- (v) Existuje někdo, kdo se nenarodil v Kartágu a není to Říman.

Konkrétně:

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle R, M, K, N, a, c, d \rangle$ bez rovností, kde R, M, K, N jsou unární relační symboly a $R(x), M(x), K(x)$ resp. $N(x)$ znamenají (po řadě) “ x je Řek / Říman / Kartáginec” resp. “ x se narodil v Kartágu”, a a, c, d jsou konstanty označující Aristotela, Césara, Didó. (2b)
 - (b) Pomocí skolemizace nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$. Převedte T do CNF a napište ji v množinové reprezentaci. (2b)
 - (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. (3b)
 - (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T , která je nespílitelná. (2b)
 - (e) Vyplývá z tvrzení (i) až (iv), že “César se nenarodil v Kartágu”? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d \rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.
- (a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T . (2b)