

Cvičení ze základů složitosti a vyčísitelnosti - 2

15. a 22. října 2013

Probrané příklady

1. Modifikace Turingových strojů:
 - (a) Ukažte, že pro každý TS existuje ekvivalentní TS, který v každé instrukci provádí nejvýše dvě z činností: změna stavu, přepis písmena na pásce, posun hlavy (tj. neobsahuje instrukce typu $(p, a) \rightarrow (q, b, M)$ kde $p \neq q$, $a \neq b$, $M \in \{L, P\}$).
 - (b) Ukažte, že pro každý TS existuje ekvivalentní (až na zakódování vstupu) TS s jednopísmennou abecedou (kromě λ).
 - (c) Ukažte, že pro každý k -páskový TS existuje ekvivalentní jednopáskový TS.
 - (d) Ukažte, že každý TS je ekvivalentní zásobníkovému automatu s dvěma zásobníky (bez vstupní pásky).
 - (e) Ukažte, že pro každý TS existuje ekvivalentní TS s dvěma aktivními (tj. nekonečnými) stavy. (viz dodatek)
2. Rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky, Postova věta, Gödelovo číslo, univerzální TS.
 - (a) Nalezněte kodování mezi rozhodovacími problémy, jazyky, množinami přirozených čísel a reálnými čísly.
 - (b) Kolik je rekurzivních jazyků, rekurzivně spočetných jazyků a jazyků, které nejsou ani rekurzivně spočetné? Uveďte příklady.
 - (c) Zjistěte, co provede univerzální TS U spuštěný sám na sebe, t.j. $U(U, U)$.
 - (d) Dokažte nerozhoditelnost problému zastavení.

Domácí úkol pro lichou skupinu (po 1 bodu)

3. Ukažte, že jazyk $L_{\overline{Z}} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(x) \downarrow \text{ pro nějaký vstup } x\}$ je rekurzivně spočetný ale není rekurzivní.
4. Uvažme funkci $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definovanou: $h(i) = 1$, právě když $M_e(x) \downarrow$ pro $i = \langle e, x \rangle$. Tedy, h je (nekonečný) binární řetězec kódující problém zastavení.
Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $w \in \{0, 1\}^{\lceil \log_2 n \rceil + 1}$ takové, že z w a n lze efektivně (tj. algoritmicky) dekódovat $h \upharpoonright n$ (počáteční n -bitový úsek h). Tedy, h kóduje halting problém značně redundantně, namísto n bitů by stačilo přibližně $\log n$ bitů.

Domácí úkol pro sudou skupinu (po 1 bodu)

3. Ukažte, že jazyk $L_{diff} = \{\langle a, b \rangle \mid M_a(x) \downarrow, M_b(x) \downarrow \text{ a } M_a(x) \neq M_b(x) \text{ pro nějaký vstup } x\}$ je rekurzivně spočetný ale není rekurzivní.
4. Uvažme funkci $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definovanou: $h(i) = 1$, právě když $M_e(x) \downarrow$ pro $i = \langle e, x \rangle$. Tedy, h je (nekonečný) binární řetězec kódující problém zastavení.
Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $w \in \{0, 1\}^{\lceil \log_2 n \rceil + 1}$ takové, že z w a n lze efektivně (tj. algoritmicky) dekódovat $h \upharpoonright n$ (počáteční n -bitový úsek h). Tedy, h kóduje halting problém značně redundantně, namísto n bitů by stačilo přibližně $\log n$ bitů.