NTIN099 — Algoritmické aspekty booleovských funkcí a parametrizovaná složitost

Petr Kučera

2016/17

Úvod

Sylabus

1. Exponenciální algoritmy pro k-SAT a obecný SAT
2. Úvod do parametrizované složitosti, příklady z teorie grafů.
3. Parametrizované algoritmy pro SAT založené na backdoor množinách.
4. Algoritmy pro SAT parametrizované stromovou šířkou.
5. Algoritmy pro SAT parametrizované deficiencí formule vzhledem k matched formulím
6. Kernelizace pro MaxSAT a parametrizace MaxSAT
7. Algoritmy pro MaxSAT založené na větvení a prořezávání (branch & bound)
8. Aproximační algoritmy pro MaxSAT

Obsah I

Obsah II

Obsah III

Parametrizované algoritmy a složitost

Parametrizovaný problém

Parametrizovaný problém

Definice 1

Parametrizovaný problém je formálně definován jako jazyk $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$. Druhý prvek je zván parametrem problému L.

Definice 2

Parametrizovaný problém L je řešitelný s pevným parametrem (fixed-parameter tractable), pokud existuje deterministický algoritmus, který pro danou dvojici (x, k)

- rozhodne, zda $(x, k) \in L$, a
- pracuje v čase $f(k) \cdot n^{O(1)}$, kde $f(k)$ je algoritmicky vyčíslitelná funkce.

Problémy řešitelné s pevným parametrem tvoří třídu FPT.

- Parametr bývá obvykle číselný, ale není to podmínkou.

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí (VP)	
Instance	Graf $G = (V, E)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G vrcholové pokrytí velikosti k? Přesněji, existuje množina $S \subseteq V$ vrcholů velikosti nejvýš k, která obsahuje alespoň jeden vrchol z každé hrany grafu G?

- Nadále označujeme $n = |V|$ a $m = |E|$.
- Je-li G graf a v jeho vrchol, pomocí $G \setminus \{v\}$ označujeme graf vzniklý z G odstraněním vrcholu v i všech hran, v nichž se vyskytuje.

Jednoduchý algoritmus pro VP

Funkce HledejVP(G, k)

Vstup: Graf $G = (V, E)$, $k \geq 0$
Výstup: Vrcholové pokrytí $S \subseteq V$, $|S| \leq k$, nebo NENÍ

```
1  if E = ∅ then return ∅
2  if k = 0 then return NENÍ
3  Vyber libovolnou hranu {u, v} ∈ E
4  if HledejVP(G \ {u}, k − 1) najde množinu S′ then
5      return S = S′ ∪ {u}
6  else if HledejVP(G \ {v}, k − 1) najde množinu S″ then
7      return S = S″ ∪ {v}
8  else
9      return NENÍ
10 end
```

Vlastnosti algoritmu pro VP

- Funkce HledejVP(G, k) najde vrcholové pokrytí velikosti nejvýš k grafu G, pokud existuje.
- Pokud vrcholové pokrytí velikosti nejvýš k v grafu G neexistuje, ohlásí HledejVP(G, k) NEEXISTUJE.
- Funkce HledejVP(G, k) pracuje v čase $O(2^k \cdot n)$.
- Z toho plyne, že Vrcholové pokrytí s parametrem k patří do FPT.

Možné parametrizace VP

Obecné grafy

Parametr	Horní odhad
k	$O(1{,}28^k + kn)$
$n - k$	$\mathrm{W}[1]$-úplné (nejspíš není v FPT)
Stromová šířka w grafu G	$2^w \cdot n$

Rovinné grafy

k	$O(c^{\sqrt{k}} + kn)$, $c \leq 2^{4\sqrt{3}} \approx 121{,}8$

- Je-li G rovinný, má vrcholové pokrytí velikosti nejvýš $\frac{3}{4}n$.
- Můžeme uvážit parametr $\frac{3}{4}n - k$.
- Parametrizace nad/pod zaručenou hodnotu

Vliv funkce f na čas

k	$f(k) = 2^k$	$f(k) = 1{,}32^k$	$f(k) = 1{,}28^k$
10	$\approx 10^3$	≈ 16	≈ 12
20	$\approx 10^6$	≈ 258	≈ 140
30	$\approx 10^9$	≈ 4140	≈ 1650
40	$\approx 10^{12}$	$\approx 6{,}6 \cdot 10^4$	$\approx 2{,}0 \cdot 10^4$
50	$\approx 10^{15}$	$\approx 1{,}1 \cdot 10^6$	$\approx 2{,}3 \cdot 10^5$
75	$\approx 10^{22}$	$\approx 1{,}1 \cdot 10^9$	$\approx 1{,}1 \cdot 10^8$
100	$\approx 10^{30}$	$\approx 1{,}1 \cdot 10^{12}$	$\approx 5{,}3 \cdot 10^{10}$
500	$\approx 10^{130}$	$\approx 1{,}4 \cdot 10^{60}$	$\approx 4{,}1 \cdot 10^{53}$

Možné parametry SAT

Délka klauzule k Nedává smysl, pro $k = 2$ polynomiální, pro $k = 3$ NP-úplné.

Počet proměnných n

- Triviálně řešitelné v čase $O^*(2^n)$.
- Má větší smysl spolu s omezením délky klauzule k, pro $k = 3$ lze lépe než $O^*(1{,}49^n)$ deterministicky a $O^*(1{,}30704^n)$ randomizovaně.
- Souvisí se Strong Exponential Time Hypothesis

Počet klauzulí m Lze v čase $O^*(1{,}24^m)$.

Délka formule ℓ Lze v čase $O^*(1{,}08^\ell)$.

Značení: $O^*()$ — až na polynomiální faktor.

Další možné parametry SAT

Váha ohodnocení w

- Hledáme splňující ohodnocení, které má přesně w jedniček.
- $\mathrm{W}[2]$-úplné.
- Použito k definici třídy $\mathrm{W}[2]$.

Maximální deficience formule $\delta^*(\varphi)$ Lze v čase $O(2^{\delta^*(\varphi)} \cdot n^3)$.

Stromová šířka různých grafů asociovaných s formulí Je v FPT, konkrétní složitost závisí na typu grafu, který se uvažuje.

Kernelizace

Kernel čili „těžké jádro“ problému

- Cílem je zredukovat danou instanci parametrizovaného problému na tzv. jádro (kernel), které obsahuje tu těžkou část problému.
- Redukce a úpravy by měly být proveditelné v polynomiálním čase.
- Jádro chceme co nejmenší, s velikostí závisející jen na parametru k.

Bussova redukční pravidla pro VP

1. Odstraň izolované vrcholy z grafu G.
2. Je-li vrchol u stupně 1 a v je jeho jediný soused, pak vlož v do vrcholového pokrytí S a z G odstraň u, v a s nimi incidentní hrany. Sniž hodnotu parametru k o 1.
3. Je-li u vrchol stupně alespoň $k+1$, vlož u do S, odstraň u z G spolu s incidentními hranami a sniž hodnotu parametru k o 1.

Označíme-li $(G' = (V', E'), k')$ dvojici vzniklou z $(G = (V, E), k)$ opakováním uvedených pravidel dokud je to možné, pak

- G má vrcholové pokrytí velikosti k, právě když G' má vrcholové pokrytí velikosti k'.
- Pokud G má vrcholové pokrytí velikosti k, pak $|V'| \leq k'^2 + k'$ a $|E'| \leq k'^2$.
- Graf G' lze vytvořit v čase $O(k \cdot |V|)$.
- (G', k') je jádro kvadratické velikosti.

Jádro problému — definice

Definice 3

Uvažme parametrizovaný problém $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, tj. L obsahuje dvojice (I, k), kde I je instance a k je parametr. Redukcí na jádro (kernel) míníme náhradu dvojice (I, k) redukovanou instancí (I', k') (zvanou jádro nebo kernel), pro kterou platí, že

$$k' \leq k \text{ a } |I'| \leq g(k),$$

kde $g(k)$ je algoritmicky vyčíslitelná funkce a

$$(I, k) \in L \Leftrightarrow (I', k') \in L.$$

Navíc redukci (I, k) na (I', k') musí být možno provést v polynomiálním čase $T_K(|I|, k)$. Funkci $g(k)$ zveme velikostí jádra (kernelu)

Jádro problému — poznámky

- Jedná se o úpravu dat před vlastním vyhledáváním řešení.
- Redukce jsou často využívány i během prohledávání.
- Parametr k je obvykle hodnotou hledaného řešení.
- Redukční pravidla mohou být

  závislá na parametru pokud je parametrem hodnota řešení, pak musíme dopředu vědět, jak velké řešení hledáme.

  nezávislá na parametru lze je použít vždy nezávisle na hodnotě parametru.

Nezávislá množina v rovinném grafu

Nezávislá množina v rovinném grafu	
Instance	Rovinný graf $G = (V, E)$ a celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G nezávislá množina velikosti alespoň k?

Věta 4

Nezávislá množina v rovinném grafu má jádro (vzhledem k parametru k) velikosti $4k$.

Plyne triviálně z věty o čtyřech barvách.

Každý problém má své jádro

Věta 5

Nechť $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je rozhodnutelný parametrizovaný problém. Potom L je řešitelný parametrizovaným algoritmem vzhledem k parametru k, právě když existuje redukce L na jádro vzhledem k parametru k.

$\Rightarrow$ Jde o triviální jádro, které není prakticky použitelné.

$\Leftarrow$ Na jádro lze použít „hrubou sílu“.

MaxSAT

MaxSAT	
Instance	Booleovská formule φ v KNF s m klauzulemi a celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje ohodnocení v, které splní alespoň k klauzulí φ?

Tvrzení 6

Problém MaxSAT *má jádro (vzhledem k parametru k) velikosti $O(k^2)$, které může být nalezeno v lineárním čase.*

Prohledávání s omezenou hloubkou

Prohledávání s omezenou hloubkou

- Idea: Pro danou instanci (I, k) parametrizovaného problému L se snažíme najít „malou množinu“ případů, na které můžeme instanci rozložit.
- Větvíme podle těchto podpřípadů, hledání podpřípadů a jejich konstrukce by měla být polynomiální.
- V principu rekurzivní.
- Hloubka rekurze je omezena na základě parametru k.
- Rekurzivní volání tvoří prohledávací strom (search tree).
- Zajímá nás velikost prohledávacího stromu — počet rekurzivních volání.

Jednoduché příklady

- Algoritmus 1 pro Vrcholové pokrytí, který konstruuje prohledávací strom velikosti $O(2^k)$.
- Prohledávací strom velikosti $O(6^k)$ pro Nezávislou množina v rovinném grafu:
  1. Najdi v $G = (V, E)$ vrchol v stupně nejvýš 5.
  2. Jeden z vrcholů v $v \cup N(v)$ je v maximální nezávislé množině.
  3. Větvíme na 6 případů, můžeme skončit v hloubce k.

Jednoduchý větvící algoritmus pro 3-SAT

Algoritmus 1: Algoritmus pro 3-SAT

Vstup: Formule v 3KNF $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ na n proměnných.

Výstup: Splňující ohodnocení v nebo UNSAT.

1 **if** $m = 0$ **then return** prázdné ohodnocení v
2 **if** $n = 0$ **then return** UNSAT
3 Ať $C_1 = (e_1 \vee e_2 \vee e_3)$, kde e_1, e_2, e_3 jsou literály.
4 $\varphi_1 \leftarrow \varphi[e_1 = 1]$
5 $\varphi_2 \leftarrow \varphi[e_1 = 0, e_2 = 1]$
6 $\varphi_3 \leftarrow \varphi[e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1]$
7 **if** jedna z formulí φ_1, φ_2 a φ_3 je splnitelná **then**
8 **return** odpovídající splňující ohodnocení
9 **else**
10 **return** UNSAT
11 **end**

Složitost jednoduchého algoritmu pro 3-SAT

Věta 7 (Monien a Speckenmeyer, 1985)

Velikost stromu prohledávání (=počet rekurzivních volání) algoritmu 1 je $O(1{,}83929^n)$. *Celkový čas algoritmu 1 je tedy* $O(1{,}83929^n \cdot n)$.

- Jak ukázat velikost stromu prohledávání?

Charakteristický polynom

Uvažme algoritmus, který řeší problém velikosti n a provádí rekurzivní volání na instance velikosti $n - d_1, n - d_2, \ldots, n - d_i$

- $(d_1, \ldots, d_i)$ nazveme větvícím vektorem (branching vector) této rekurze.
- Počet listů T_n stromu rekurzivních volání je dána řešením rekurentní rovnice

$$T_n = T_{n-d_1} + T_{n-d_2} + \cdots + T_{n-d_i} .$$

- Této rovnici odpovídá charakteristický polynom

$$z^d - z^{d-d_1} - z^{d-d_2} - \ldots - z^{d-d_i} .$$

Velikost stromu prohledávání

Tvrzení 8

Prohledávací strom s větvícím vektorem $(d_1, \ldots, d_i)$ má velikost $n^{O(1)} \cdot |\alpha|^n$, kde α je kořenem charakteristického polynomu pro tento větvící vektor, kde $d = \max\{d_1, \ldots, d_i\}$.

- Stupeň u polynomu $n^{O(1)}$ je daný násobností kořene α.
- Při prohledávání se může větvící vektor pro jednotlivá rekurzivní volání lišit, uvažujeme nejhorší případ.
- Stačí počítat počet listů stromu, počet vnitřních vrcholů je nejvýš počet listů (větvení je vždy alespoň 2).

Cluster Editing

Definice 9

Graf $G = (V, E)$ jehož každá komponenta souvislosti je úplný podgraf G, nazveme cluster grafem.

Cluster Editing	
Instance	Graf $G = (V, E)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Je možné odebráním nebo přidáním nejvýše k hran upravit graf G na cluster graf G'?

Lemma 10

Graf $G = (V, E)$ je cluster graf, právě když v G není cesta se dvěma hranami jako indukovaný podgraf.

Jednoduchý algoritmus pro Cluster Editing

Funkce HledejCE(G, k)

Vstup: Graf $G = (V, E)$, $k \geq 0$.
Výstup: true/false

1 **if** G je cluster graf **then return true**
2 **if** $k \leq 0$ **then return false**
3 Najdi vrcholy $u, v, w \in V$, které indukují cestu délky 2 v G, tj. $\{u, v\}, \{u, w\} \in E$ a $\{v, w\} \notin E$.
4 **return** HledejCE($G = (V, E \setminus \{\{u, v\}\})$, $k - 1$) **or** HledejCE($G = (V, E \setminus \{\{u, w\}\})$, $k - 1$) **or** HledejCE($G = (V, E \cup \{\{v, w\}\})$, $k - 1$)

- Algoritmus HledejCE vytváří strom prohledávání velikosti $O(3^k)$.

Vylepšený rozbor případů

Při větvení rozlišíme tři případy pro trojici $u, v, w \in V$ z algoritmu HledejCE , tj. $\{u, v\}, \{u, w\} \in E$ a $\{v, w\} \notin E$:

(C1) Jediným společným sousedem vrcholů v a w je u.

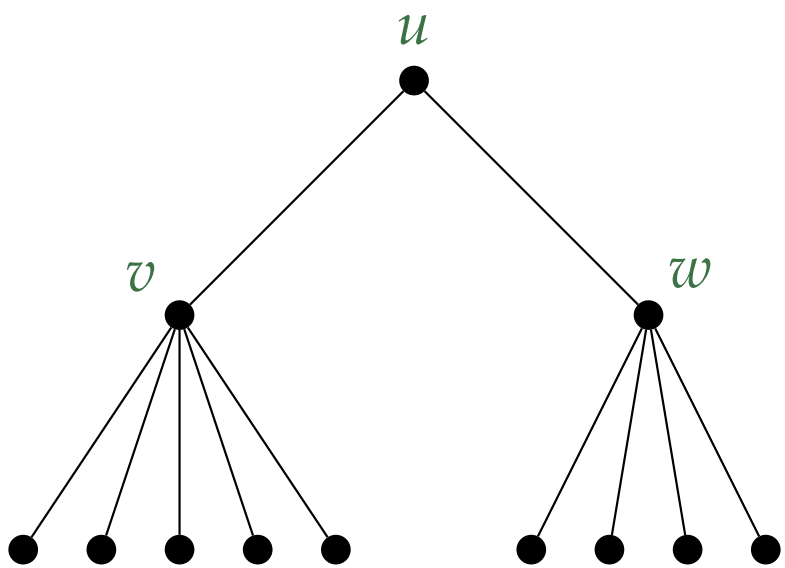
(C2) Vrcholy v a w mají společného souseda $x \neq u$ a $\{u, x\} \in E$.

(C3) Vrcholy v a w mají společného souseda $x \neq u$ a $\{u, x\} \notin E$.

Permanentní hrana Hrana grafu G, která nesmí být odstraněna.

Zakázaná hrana Dvojice vrcholů $\{u, v\} \notin E$, která nesmí být přidána jako hrana.

Případ C1



Větvíme do dvou podpřípadů:

(B1) odebrání hrany $\{u, v\}$ a

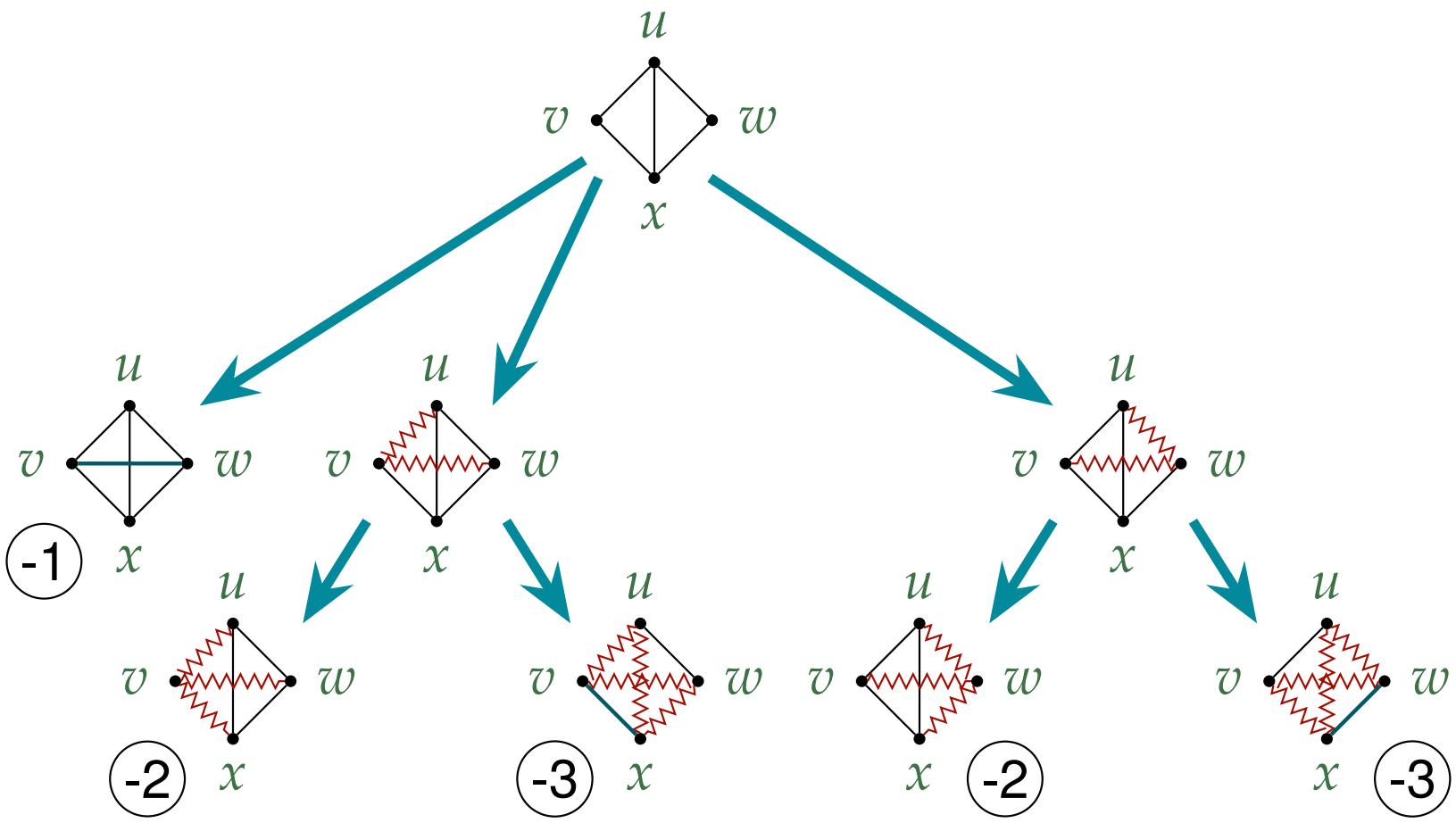
(B2) odebrání hrany $\{u, w\}$ a

Přidání hrany $\{v, w\}$ (případ (B3)) nemůže dát lepší řešení.

Případ C2

Zakázaná hrana

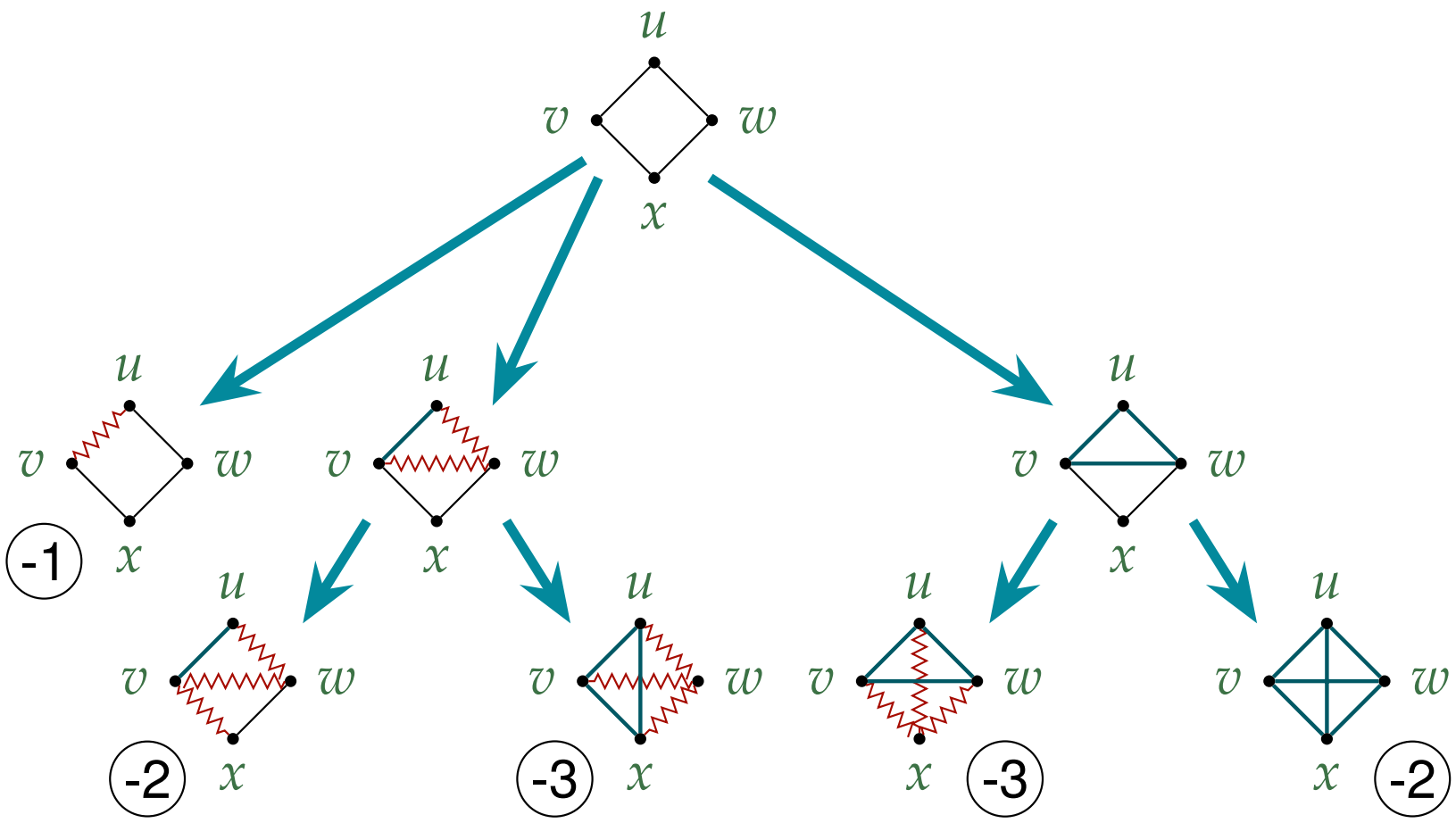
Permanentní hrana



Případ C3

Zakázaná hrana

Permanentní hrana



Shrnutí

Nejhorší větvící vektor je $(1, 2, 2, 3, 3)$, z toho plyne:

Věta 11

Pro Cluster Editing existuje strom prohledávání velikosti $O(2{,}27^k)$.

Parametrizovaná složitost

Parametrizovaný problém — přísnější definice

- Nově budeme požadovat, aby hodnota parametru byla funkcí dané instance.
- Parametr je celé číslo.

Definice 12 (Parametrizovaný problém)

Parametrizovaný problém L nad abecedou Σ je množina dvojic (x, k), kde $x \in \Sigma^*$ a k je celé číslo, pro které platí, že

$$(\forall x \in \Sigma^*)(\forall k, k' \in \mathbb{N})\,[((x,k) \in L \wedge (x,k') \in L) \Rightarrow k = k']\ .$$

VRCHOLOVÉ POKRYTÍ parametrem je velikost minimálního vrcholového pokrytí daného grafu.

NEZÁVISLÁ MNOŽINA parametrem je velikost maximální nezávislé množiny daného grafu.

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí (VP)	
Instance	Graf $G = (V, E)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G vrcholové pokrytí velikosti přesně k?

Vážené Vrcholové pokrytí (VVP)	
Instance	Graf $G = (V, E)$, ke každému vrcholu $v \in V$ přirozené číslo $w(v)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G vrcholové pokrytí se součtem vah rovným k?

Nezávislá množina a klika

Nezávislá množina (NM)	
Instance	Graf $G = (V, E)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G nezávislá množina velikosti přesně k?

Klika	
Instance	Graf $G = (V, E)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G klika velikosti přesně k?

Dominující množina

Dominující množina	
Instance	Graf $G = (V, E)$, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje v G dominující množina velikosti přesně k? Přesněji, existuje množina vrcholů $S \subseteq V, \lvert S \rvert = k$, která splňuje, že každý vrchol $v \in V \setminus S$ je spojen hranou s nějakým vrcholem v S?

Vážená splnitelnost

- Třídy parametrizované složitosti jsou definované s pomocí parametrizované převoditelnosti a vážené splnitelnosti.
- Je-li v ohodnocení proměnných, pak jeho váhou je počet proměnných, kterým v přiřazuje hodnotu 1.

VÁŽENÁ (2-)KNF SPLNITELNOST (WEIGHTED (2-)SAT)	
Instance	Formule φ v (2-)KNF, celé číslo $k \geq 0$.
Otázka	Existuje splňující ohodnocení v pro φ s váhou přesně k?

- Nejspíš nepatří do FPT.
- Pokud bychom hledali ohodnocení s váhou nejvýš k, tak tato verze s 2-KNF do FPT patří (tj. je zde rozdíl mezi „přesně“ a „nejvýš“).

Parametrizovaná převoditelnost

Definice 13

Nechť $L, L' \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ jsou dva parametrizované problémy. Řekneme, že L lze převést na L' standardní parametrizovanou převoditelností, pokud existují algoritmicky vyčíslitelné funkce $k \mapsto k'$, $k \mapsto k''$ a $(x,k) \mapsto x'$, pro které platí:

1. $(x,k) \mapsto x'$ lze spočítat v čase $k'' \cdot |(x,k)|^c$ a
2. $(x,k) \in L$ právě když $(x',k') \in L'$.

- Budeme též říkat, že problém L je fpt-převoditelný na problém L', budeme používat značení $L \leq_{\text{fpt}} L'$.
- Parametrizovaná převoditelnost je reflexivní a tranzitivní.
- Pokud L' patří do FPT, pak i L patří do FPT.

Příklady

- Nezávislá množina $\leq_{\text{fpt}}$ Klika.
- Nezávislá množina $\leq_{\text{fpt}}$ Vážená 2-KNF splnitelnost.
- Dominující množina $\leq_{\text{fpt}}$ Vážená KNF splnitelnost.
- Vážené vrcholové pokrytí $\leq_{\text{fpt}}$ Vrcholové pokrytí.
- Vrcholového pokrytí $\leq_{\text{fpt}}$ Dominující množina.
- Řada klasických polynomiálních převodů není fpt, např.
  - Převod Vrcholového pokrytí na Nezávislou množinu.
  - Převod SAT na 3-SAT není parametrizovaným převodem Vážené KNF splnitelnosti na Váženou 3-KNF splnitelnosti.

Třídy $\mathrm{W}[1]$ a $\mathrm{W}[2]$

Definice 14

1. Třída $\mathrm{W}[1]$ obsahuje parametrizované problémy, které jsou fpt-převoditelné na Váženou 2-KNF splnitelnost.
2. Parametrizovaný problém L je $\mathrm{W}[1]$-těžký, pokud je na něj fpt-převoditelná Vážená 2-KNF splnitelnost.
3. Pokud parametrizovaný problém L patří do $\mathrm{W}[1]$ a navíc je $\mathrm{W}[1]$-těžký, pak je $\mathrm{W}[1]$-úplný.
4. Třída $\mathrm{W}[2]$ je definována analogicky s pomocí Vážené KNF splnitelnosti.

- Platí, že $\mathrm{FPT} \subseteq \mathrm{W}[1] \subseteq \mathrm{W}[2]$.
- Pokud by platilo $\mathrm{W}[1] = \mathrm{FPT}$, pak by bylo možné vyřešit 3-SAT v čase $2^{o(n)} \cdot |\varphi|^{O(1)}$. ($\sim$ Exponential Time Hypothesis)

$\mathrm{W}[1]$-úplné problémy

- Vážená antimonotónní 2-KNF splnitelnost se od Vážené 2-KNF splnitelnosti liší tím, že se v ní vyskytují pouze negativní literály.

Věta 15

Vážená 2-KNF splnitelnost je fpt převoditelná na Váženou antimonotónní 2-KNF splnitelnost. Vážená antimonotónní 2-KNF splnitelnost je tedy $\mathrm{W}[1]$-úplný problém.

Další $\mathrm{W}[1]$-úplné problémy:

- Nezávislá množina
- Klika
- Vážená q-KNF splnitelnost pro libovolné $q \geq 2$.

$\mathrm{W}[2]$-úplné problémy

Příklady $\mathrm{W}[2]$-úplných problémů:

- Dominující množina.
- Hitting set.
- Set Cover.

W = weft obvodu

Definice 16

- Řekneme, že logické hradlo (AND nebo OR) je velké, pokud má více než dva vstupy, pokud má dva vstupy, pak je malé.
- Je-li C obvod, pak pojmem weft obvodu C označujeme maximální počet velkých hradel na jakékoli cestě ze vstupu k výstupu.
- Uvažme formuli φ a odpovídající obvod C_φ, řekneme, že φ je t-normalizovaná, pokud
  1. výstupním hradlem C_φ je velké hradlo AND a
  2. C_φ má weft nejvýš t,
  3. na žádné cestě ze vstupu k výstupu po sobě nenásledují dvě malá hradla téhož typu.

- Například 2-KNF je 1-normalizovaná, obecná KNF je 2-normalizovaná.

Varianty vážené splnitelnosti

Vážená t-normalizovaná splnitelnost vážená splnitelnost t-normalizovaných formulí.

Vážená splnitelnost vstupem je formule, na niž neklademe žádná omezení.

Vážená obvodová splnitelnost vstupem je obvod, na nějž neklademe žádná omezení.

Hierarchie W

Definice 17

1. $\mathrm{W}[t]$, $t \geq 1$ je třídou parametrizovaných problémů, které jsou fpt-převoditelné na Váženou t-normalizovanou splnitelnost.
2. $\mathrm{W}[Sat]$ je třídou parametrizovaných problémů, které jsou fpt-převoditelné na Váženou splnitelnost.
3. $\mathrm{W}[P]$ je třídou parametrizovaných problémů, které jsou fpt-převoditelné na Váženou obvodovou splnitelnost
4. XP obsahuje parametrizovaný problém L, pokud lze v čase $f(k) \cdot |x|^{g(k)}$ rozhodnout, zda $(x, k) \in L$, kde f a g jsou algoritmicky vyčíslitelné funkce.

Věta 18

$\mathrm{FPT} \subseteq \mathrm{W}[1] \subseteq \mathrm{W}[2] \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{W}[Sat] \subseteq \mathrm{W}[P] \subseteq \mathrm{XP}$.

Booleovské formule — definice a značení

Booleovské formule

- Literál je proměnná x (pozitivní literál), nebo negace proměnné $\overline{x}$ (negativní literál).
- Klauzule je disjunkcí literálů, např. $C = (x \vee y \vee \overline{z})$.
- Klauzuli považujeme za množinu literálů, např. $C = \{x, y, \overline{z}\}$.
- Konjunktivně normální forma (KNF) je konjunkcí klauzulí, např. $\varphi = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y})(y)$.
- KNF považujeme za množinu klauzulí, např. $\varphi = \{(x \vee y \vee \overline{z}), (\overline{x} \vee \overline{y}), (y)\}$.
- $\mathrm{var}(\varphi)$ označuje množinu proměnných formule φ.
- $\overline{C}$ označuje klauzuli s literály opačné polarity ke klauzuli C, tj. $\overline{C} = \{\overline{x} \mid x \in C\} \cup \{x \mid \overline{x} \in C\}$.
- Klauzule C_1 a C_2 mají konflikt v proměnné x pokud $x \in \overline{C_1} \cap C_2$ nebo $x \in C_1 \cap \overline{C_2}$.

Ohodnocení proměnných

- Ohodnocení $v : \mathrm{var}(\varphi) \mapsto \{0, 1\}$ je splňující ohodnocení čili model formule φ, pokud $\varphi(v) = 1$.
- Množinu modelů formule φ označíme $T(\varphi)$.
- Ohodnocení $v : \mathrm{var}(\varphi) \mapsto \{0, 1\}$ je nesplňující ohodnocení čili falsepoint formule φ, pokud $\varphi(v) = 0$.
- Množinu falsepointů formule φ pomocí $F(\varphi)$.
- Je-li $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$, pak $v : B \mapsto \{0, 1\}$ je částečné ohodnocení.
- Pomocí $\varphi[v]$ označíme formuli vzniklou z φ aplikací částečného ohodnocení v — odstraníme splněné klauzule a nesplněné literály.
- Prázdná klauzule $\bot$ není splněna žádným ohodnocením.
- Prázdná KNF $\top$ je splněna každým ohodnocením.

Operace s KNF

- Je-li φ KNF a $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$, pak $\varphi - B$ označuje formuli vzniklou odstraněním všech literálů s proměnnými z B, tj.:

$$\varphi - B = \{C \setminus (B \cup \overline{B}) \mid C \in \varphi\}$$

Parametrizace splnitelnosti

Parametrizace splnitelnosti

- Parametrem splnitelnosti rozumíme nějakou algoritmicky vyčíslitelnou funkci π, která každé formuli φ přiřazuje nezáporné číslo $\pi(\varphi)$.
- Předpokládáme, že $\pi(\varphi) = \pi(\varphi')$, pokud jsou formule φ a φ' izomorfní (tj. liší se jen přejmenováním proměnných).

SAT(π)	
Instance	Formule φ a číslo $k \geq 0$, pro které platí $\pi(\varphi) \leq k$.
Otázka	Je φ splnitelná?

Ověření parametru

- SAT(π) je tzv. promise problém — slibujeme řešiteli, že daná formule má hodnotu parametru omezenou k.
- Ověření toho, zda je tomu opravdu tak, je samostatným problémem.

VER(π)	
Instance	Formule φ a číslo $k \geq 0$
Otázka	Je $\pi(\varphi) \leq k$?

Backdoor množiny

Backdoor množina

Definice 19

Nechť C je třída KNF, φ je KNF a $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$. Potom B je

silná C-backdoor množina, pokud pro každé ohodnocení $v : B \mapsto \{0,1\}$ platí, že $\varphi[v] \in C$. Velikost nejmenší silné C-backdoor množiny označíme $\mathbf{b}_C(\varphi)$.

slabá C-backdoor množina, pokud existuje ohodnocení $v : B \mapsto \{0,1\}$ takové, že $\varphi[v] \in C$ a navíc je splnitelná. Velikost nejmenší slabé C-backdoor množiny označíme $\mathbf{wb}_C(\varphi)$.

výmazová C-backdoor množina (deletion C-backdoor set), pokud po odstranění všech literálů s proměnnými z B nová formule $\varphi - B$ patří do C. Velikost nejmenší výmazové C-backdoor množiny označíme $\mathbf{db}_C(\varphi)$.

Základní třída a splnitelnost

Obvyklé požadavky na základní třídu $\mathcal{C}$:

1. $\mathcal{C}$ je uzavřená na izomorfismus (=přejmenování proměnných).
2. Rozhodnutí, zda KNF $\varphi \in \mathcal{C}$ lze učinit v polynomiálním čase.
3. Splnitelnost formule KNF $\varphi \in \mathcal{C}$ lze rozhodnout v polynomiálním čase.
4. Někdy navíc: *$\mathcal{C}$ je seberedukovatelná, tj. pokud $\varphi \in \mathcal{C}$ a x je proměnná φ, pak $\varphi[x := 0] \in \mathcal{C}$ i $\varphi[x := 1] \in \mathcal{C}$.*

Pozorování 20

Pokud $\mathcal{C}$ splňuje požadavky 1-3, potom jsou problémy SAT($\mathbf{b}_\mathcal{C}$) a SAT($\mathbf{wb}_\mathcal{C}$) v FPT.

Hornovské a 2-KNF formule

Definice 21

- Klauzule je hornovská, obsahuje-li nejvýš jeden pozitivní literál.
- KNF φ je hornovská, skládá-li se z hornovských klauzulí.
- Booleovská funkce f je hornovská, pokud ji lze reprezentovat nějakou hornovskou KNF.
- Třídu hornovských KNF označíme Horn.
- KNF φ je 2-KNF pokud se skládá z klauzulí, které obsahují nejvýš dva literály.
- Třídu 2-KNF označíme pomocí Krom.

Věta 22

Splnitelnost hornovských a 2-KNF formulí je možné rozhodnout v lineárním čase vzhledem k délce formule.

Slabé Horn a Krom-backdoor množiny

Věta 23 (Nishimura, Ragde a Szeider, 2004)

Problémy VER($\mathbf{wb}_{\mathrm{Horn}}$) a VER($\mathbf{wb}_{\mathrm{Krom}}$) jsou $\mathrm{W}[2]$*-těžké.*

Výmazové a silné backdoor množiny

Definice 24

Řekneme, že třída KNF $\mathcal{C}$ je uzavřená na odebírání klauzulí (*clause induced*), pokud pro každou KNF $\varphi \in \mathcal{C}$ a její pod-KNF $\varphi' \subseteq \varphi$ platí, že $\varphi' \in \mathcal{C}$.

Třídy Horn i Krom jsou uzavřené na odebírání klauzulí.

Lemma 25

Nechť $\mathcal{C}$ je třída KNF uzavřená na odebírání klauzulí a nechť $\varphi \in \mathcal{C}$ je KNF z třídy $\mathcal{C}$, potom každá výmazová $\mathcal{C}$-backdoor množina B pro φ je současně silná $\mathcal{C}$-backdoor množina pro φ.

Hornovské a 2-KNF výmazové backdoor množiny

Lemma 26 (Crama, Ekin a Hammer, Nishimura, Ragde a Szeider, 2004)

Je-li $\mathcal{C}$ třída Horn nebo Krom, pak pro libovolnou formuli $\varphi \in \mathcal{C}$ a množinu proměnných B platí, že B je výmazová $\mathcal{C}$-backdoor množina pro φ, právě když B je silná $\mathcal{C}$-backdoor množina pro φ.

Silné Hornovské-backdoor množiny

S KNF φ asociujeme graf $G_\varphi(V, E)$, kde

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{var}(\varphi) \\ E &= \big\{\{x, y\} \mid (\exists C \in \varphi)\,[\{x, y\} \subseteq C]\big\} \end{aligned}$$

Nechť $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$, potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. B je silná Horn-backdoor množina pro φ.
2. B je výmazová Horn-backdoor množina pro φ.
3. B je vrcholové pokrytí G_φ.

Věta 27 (Nishimura, Ragde a Szeider, 2004)

Problémy VER($\mathbf{b}_{\mathrm{Horn}}$) a VER($\mathbf{db}_{\mathrm{Horn}}$) jsou v FPT. *Lze je vyřešit v čase* $O^*(1{,}273^k)$.

Silné 2-KNF-backdoor množiny

S KNF φ asociujeme množinu trojic proměnných $\mathcal{U}_\varphi$:

$$\mathcal{U}_\varphi = \big\{\{x,y,z\} \mid (\exists C \in \varphi)\ [\{x,y,z\} \subseteq \mathrm{var}(C)]\big\}$$

Nechť $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$, potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. B je silná Krom-backdoor množina pro φ.
2. B je výmazová Krom-backdoor množina pro φ.
3. B je hitting set $\mathcal{U}_\varphi$.

Věta 28 (Nishimura, Ragde a Szeider, 2004)

Problémy VER($\mathbf{b}_{\mathrm{Krom}}$) a VER($\mathbf{db}_{\mathrm{Krom}}$) jsou v FPT*. Lze je vyřešit v čase* $O^*(2{,}270^k)$.

Backdoor množiny a #SAT

Úlohu #SAT lze parametrizovat parametrem π:

#SAT(π)	
Instance	Formule φ a číslo $k \geq 0$, pro které platí $\pi(\varphi) \leq k$.
Cíl	Určit $\lvert T(\varphi)\rvert$ (tj. počet modelů φ).

Je-li φ KNF a B je silná backdoor množina, pak

$$\lvert T(\varphi)\rvert = \sum_{\tau : B \mapsto \{0,1\}} \lvert T(\varphi[\tau])\rvert.$$

Hitting a cluster formule

Definice 29

- Řekneme, že KNF φ je hitting formule, pokud každé dvě klauzule $C_1, C_2 \in \varphi$ mají konflikt v nějaké proměnné.
- Třídu hitting formulí označíme HIT.
- Řekneme, že KNF φ je cluster formule, pokud jde o konjunkci několika hitting formulí, které mají po dvou disjunktní množiny proměnných.
- Třídu cluster formulí označíme CLU.

#SAT hitting a cluster formulí

Lemma 30

Je-li φ hitting formule na n proměnných, pak

$$|T(\varphi)| = 2^n - \sum_{C \in \varphi} 2^{n-|C|}.$$

Lemma 31

#SAT je pro cluster formule řešitelný v polynomiálním čase.

CLU-backdoor množiny

- Třída CLU je uzavřená na odebírání klauzulí, proto pro každou formuli $\varphi \in \mathrm{CLU}$ platí $\mathbf{b}_{\mathrm{CLU}}(\varphi) \leq \mathbf{db}_{\mathrm{CLU}}(\varphi)$.
- Na rozdíl od hornovských a 2KNF formulí existují formule $\varphi \in \mathrm{CLU}$, pro které platí $\mathbf{b}_{\mathrm{CLU}}(\varphi) < \mathbf{db}_{\mathrm{CLU}}$.
- Silné CLU-backdoor množiny (nejspíš) nelze hledat parametrizovaným algoritmem přímo, protože

Věta 32 (Nishimura, Ragde a Szeider, 2007)

Problém VER($\mathbf{b}_{\mathrm{CLU}}$) je $\mathrm{W}[2]$-těžký.

- Zavedeme jiný parametr $\mathbf{clu}(\varphi)$ (clusterová šířka formule), pro který bude platit

$$\mathbf{b}_{\mathrm{CLU}}(\varphi) \leq \mathbf{clu}(\varphi) \leq \mathbf{db}_{\mathrm{CLU}}(\varphi).$$

Obstrukce

Definice 33

Překryvová obstrukce dvojice klauzulí $\{C_1, C_2\}$, které mají neprázdný průnik, ale nemají konflikt. S touto obstrukcí asociujeme výmazovou dvojici

$$\{\mathrm{var}(C_1 \cap C_2), \mathrm{var}(C_1 \triangle C_2)\}.$$

Konfliktová obstrukce trojice klauzulí $\{C_1, C_2, C_3\}$, kde C_2 má konflikt s C_1 i C_3, ale C_1 a C_3 konflikt nemají. S touto obstrukcí asociujeme výmazovou dvojici

$$\{\mathrm{var}((C_1 \setminus C_3) \cap \overline{C_2}), \mathrm{var}((C_3 \setminus C_1) \cap \overline{C_2})\}.$$

Vlastnosti obstrukcí

Lemma 34

1. *KNF φ je cluster formule, právě když neobsahuje překryvovou ani konfliktovou obstrukci.*
2. *Nechť φ je KNF a $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$. Pokud $\varphi - B$ je cluster formule, pak pro každou výmazovou dvojici $\{X, Y\}$ asociovanou s nějakou obstrukcí v φ platí, že $X \subseteq B$ nebo $Y \subseteq B$.*

Obstrukční graf

Definice 35

S KNF φ asociujeme obstrukční graf $G_\varphi = (V, E)$, kde

- $V = \mathrm{var}(\varphi)$ a
- $\{x, y\} \in E$ pokud ve φ je výmazová dvojice $\{X, Y\}$, kde $x \in X$ a $y \in Y$.

$\mathbf{clu}(\varphi) =$ velikost minimálního vrcholového pokrytí G_φ.

Věta 36 (Nishimura, Ragde a Szeider, 2007)

- *Pro každou KNF φ platí, že*

$$\mathbf{b}_{\mathrm{CLU}}(\varphi) \leq \mathbf{clu}(\varphi) \leq \mathbf{db}_{\mathrm{CLU}}(\varphi).$$

- *Problém #SAT($\mathbf{clu}$) je v* FPT.

Další třídy formulí

UP	obsahuje formule, které je možné rozhodnout s pomocí jednotkové propagace.
PL	obsahuje formule, které lze rozhodnout s pomocí eliminace čistých literálů („pure literal“).
UP + PL	obsahuje formule, které je možné rozhodnout s kombinací jednotkové propagace a eliminace čistých literálů. *Základní třída pro DPLL.*
RHorn	skrytě hornovské formule.
q-Horn	q-Hornovské formule.
Matched	matched formule.
$\mathcal{C}^{\{\}}$	třída $\mathcal{C}$ s přidanou detekcí prázdné klauzule, tj. $\mathcal{C}^{\{\}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{E}$, kde $\mathcal{E}$ je třída formulí obsahujících prázdnou klauzuli.

Backdoor množiny k dalším třídám formulí

Třída	VER($\mathbf{b}_C$)	VER($\mathbf{db}_C$)
UP	W$[P]$-úplné	nemá význam
PL	W$[P]$-úplné	nemá význam
UP + PL	W$[P]$-úplné	nemá význam
RHorn	W$[1]$-těžké	FPT
q-Horn	? (nejspíš těžké)	FPT
Matched	W$[2]$-těžké	W$[2]$-těžké
$\mathcal{C}^{\{\}}$	W$[1]$-těžké pro zmíněné třídy	nemá význam

Stromová šířka

Grafy asociované s KNF

S KNF φ můžeme asociovat např.

Primární graf $G(\varphi) = (V, E)$, kde $V = \mathrm{var}(\varphi)$ a

$$E = \big\{\{x, y\} \mid (\exists C \in \varphi)\,[\{x, y\} \subseteq \mathrm{var}(C)]\big\}$$

Duální graf $G^d(\varphi) = (V, E)$, kde $V = \varphi$ (tj. klauzule) a

$$E = \big\{\{C_1, C_2\} \mid \big(\exists x \in \mathrm{var}(\phi)\big)\,[x \in \mathrm{var}(C_1) \cap \mathrm{var}(C_2)]\big\}$$

Incidenční graf $I(\varphi) = (V_1, V_2, E)$, kde $V_1 = \mathrm{var}(\varphi)$, $V_2 = \varphi$ a

$$E = \{\{x, C\} \mid x \in \mathrm{var}(C)\}$$

Stromová šířka

Definice 37

Nechť $G = (V, E)$ je graf, stromovou dekompozicí grafu G nazveme dvojici (T, χ), kde $T = (V', E')$ je strom a $\chi : V' \mapsto \mathcal{P}(V)$ je zobrazení, pro které platí:

1. Pro každý vrchol $v \in V$ existuje vrchol stromu $t \in V'$, pro nějž $v \in \chi(t)$,
2. pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ existuje vrchol stromu $t \in V'$, pro nějž $\{u, v\} \subseteq \chi(t)$, a
3. pro každé tři vrcholy stromu $t_1, t_2, t_3 \in V'$ platí, že pokud t_1 leží na cestě mezi t_2 a t_3, pak $\chi(t_2) \cap \chi(t_3) \subseteq \chi(t_1)$.

Šířka stromové dekompozice $\max_{t \in V'} |\chi(t)| - 1$.

Stromová šířka $tw(G)$ grafu G minimální šířka stromové dekompozice G.

Stromová šířka jako parametr SAT

Definice 38

Pro formuli φ označíme pomocí

$\mathbf{tw}(\varphi)$ stromovou šířku primárního grafu $G(\varphi)$.

$\mathbf{tw}^d(\varphi)$ stromovou šířku duálního grafu $G(\varphi)$.

$\mathbf{tw}^*(\varphi)$ stromovou šířku incidenčního grafu $I(G)$.

Platí:

- Pro každou formuli φ je $\mathbf{tw}^*(\varphi) \leq \mathbf{tw}(\varphi) - 1$
- Pro každou formuli φ je $\mathbf{tw}^*(\varphi) \leq \mathbf{tw^d}(\varphi) - 1$
- Existují třídy formulí, které mají stromovou šířku incidenčního grafu 1 a libovolně velkou stromovou šířku primárního nebo duálního grafu.

Parametrizace SAT stromovou šířkou

Věta 39 (Samer a Szeider, 2010)

Splnitelnost parametrizovanou stromovou šířkou lze vyřešit v časech daných tabulkou:

#SAT(tw)	#SAT($\mathbf{tw^d}$)	#SAT($\mathbf{tw^*}$)
$O(2^k kdN)$	$O(2^k klN)$	$O(2^k k(l+2^k)N)$

- n *počet proměnných KNF* φ,
- m *počet klauzulí,*
- d *maximální počet výskytů nějaké proměnné v* φ,
- l *počet literálů v nejdelší klauzuli,*
- k *hodnota parametru (stromové šířky),*
- N *počet vrcholů odpovídající stromové dekompozice.*

Hezká stromová dekompozice

Definice 40

Trojice (T, χ, r) je hezkou stromovou dekompozicí grafu $G = (V, E)$, pokud:

1. (T, χ) je stromovou dekompozicí G.
2. T je zakořeněný strom s kořenem r.
3. Každý vnitřní vrchol $t \in V'$ má nejvýš dva syny a má jeden z následujících typů:

   Spojovací vrchol (join node) t má dva syny t_1 a t_2, kde $\chi(t) = \chi(t_1) = \chi(t_2)$.

   Uváděcí vrchol (introduce node) t má jednoho syna t' a $\chi(t) = \chi(t') \cup \{x\}$ pro nějaký vrchol $x \in V$.

   Zapomínací vrchol (forget node) t má jednoho syna t' a $\chi(t) = \chi(t') \setminus \{x\}$ pro nějaký vrchol $x \in V$.

Konstrukce stromové dekompozice

- Stromovou dekompozici s minimální šířkou lze určit v čase $O^*(1{,}8899^n)$ — (Fomin et al., 2008; Villanger, 2006).
- Určení stromové šířky je v FPT — (Bodlaender, 1996) (použitelný jen pro velmi malá k).
- Aproximační algoritmy (nejlepší známý poměr $O(\log k)$).
- FPT aproximační algoritmus s poměrem 4.
- Heuristiky a speciální třídy grafů.
- Každou stromovou dekompozici lze přetvořit do hezké stromové dekompozice bez nárůstu šířky.

Algoritmus pro #SAT($\mathbf{tw}$)

- Vycházíme z hezké stromové dekompozice $(T = (V', E'), \chi, r)$ primárního grafu $G(\varphi)$ formule φ.
- $V_t = \bigcup_{t' \in V(T_t)} \chi(t')$, kde T_t je podstrom T s kořenem t.
- Pro vrchol $t \in V'$ a ohodnocení $\alpha : \chi(t) \mapsto \{0, 1\}$ definujeme $N(t, \alpha)$ jako množinu ohodnocení $\tau : V_t \mapsto \{0, 1\}$, pro která platí:
  1. $\tau(x) = \alpha(x)$ pro všechny proměnné $x \in \chi(t)$, a
  2. τ nefalzifikuje žádnou klauzuli z φ.
- $n(t, \alpha) = |N(t, \alpha)|$.
- $|T(\varphi)| = \sum_{\alpha : \chi(r) \mapsto \{0,1\}} n(r, \alpha)$.
- Hodnoty $n(t, \alpha)$ reprezentujeme tabulkou M_t s $|\chi(t)| + 1$ sloupci (proměnné a hodnota) a $2^{|\chi(t)|}$ řádky (pro každé α).
- Řádky s $n(t, \alpha) = 0$ můžeme vynechávat.

Určení tabulky M_t (pro případ #SAT(**tw**))

1. t je list:

$$n(t,\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } C(\alpha) = 0 \text{ pro nějakou klauzuli } C \in \varphi \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

2. t je spojovací uzel se dvěma syny t_1 a t_2:

$$n(t,\alpha) = n(t_1,\alpha) \cdot n(t_2,\alpha)$$

3. t je uváděcí uzel se synem t':

$$n(t,\alpha) = \begin{cases} 0 & C(\alpha) = 0 \text{ pro nějakou } C \in \varphi \\ n(t',\alpha \restriction_{\chi(t')}) & \text{jinak} \end{cases}$$

4. t je zapomínací uzel se synem t' a $\chi(t) = \chi(t') \setminus \{x\}$:

$$n(t,\alpha) = n(t',\alpha \cup \{(x,0)\}) + n(t',\alpha \cup \{(x,1)\})$$

Složitost #SAT(tw)

Věta 41 (Samer a Szeider, 2010)

Nechť φ je KNF formule, $T = (V', E')$ je stromová dekompozice primárního grafu $G(\varphi)$ šířky k s N vrcholy, potom

1. *Je-li $t \in V'$ uzel stromové dekompozice T formule φ, a máme-li již určeny tabulky $M_{t'}$ pro všechny syny t, pak tabulku M_t lze určit v čase $O(2^k kd)$.*
2. *$|T(\varphi)|$ lze určit v čase $O(2^k kdN)$.*

Algoritmus pro #SAT($\mathbf{tw}^*$)

- Vycházíme z hezké stromové dekompozice $(T = (V', E'), \chi, r)$ primárního grafu $G(\varphi)$ formule φ.
- $V_t = \bigcup_{t' \in V(T_t)} \chi(t')$, kde T_t je podstrom T s kořenem t.
- $X_t = V_t \cap \mathrm{var}(\varphi)$ (tj. proměnné ve V_t)
- $\varphi_t = V_t \cap \varphi$ (tj. klauzule ve V_t)
- $\chi_v(t) = \chi(t) \cap \mathrm{var}(\varphi)$ (tj. proměnné v $\chi(t)$)
- $\chi_c(t) = \chi(t) \cap \varphi$ (tj. klauzule v $\chi(t)$)
- Pro uzel stromu $t \in V'$, ohodnocení $\alpha : \chi_v(t) \mapsto \{0, 1\}$ a množinu klauzulí $A \subseteq \chi_c(t)$ definujeme množinu $N(t, \alpha, A)$ ohodnocení $\tau : X_t \mapsto \{0, 1\}$, která splňují
  1. $\tau(x) = \alpha(x)$ pro každé $x \in \chi_v(t)$ a
  2. $A = \{C \in \varphi_t \mid C(\tau) \neq 1\}$.
- $n(t, \alpha, A) = |N(t, \alpha, A)|$
- $|T(\varphi)| = \sum_{\alpha : \chi_v(r) \mapsto \{0,1\}} n(r, \alpha, \emptyset)$

Tabulka M_t

Hodnoty $n(t, \alpha, A)$ reprezentujeme tabulkou M_t s $|\chi(t)| + 1$ sloupci a $2^{|\chi(t)|+1}$ řádky, kde

- $|\chi_v(t)|$ sloupců odpovídá proměnným a ohodnocení α,
- $|\chi_c(t)|$ sloupců odpovídá klauzulím a množině A,
- poslední sloupec obsahuje hodnotu $n(t, \alpha, A)$.

1. Je-li t list, pak

$$n(t, \alpha, A) = \begin{cases} 1 & A = \{C \in \chi_c(t) \mid C(\alpha) \neq 1\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

2. Je-li t spojovací uzel se syny t_1, t_2, pak

$$n(t, \alpha, A) = \sum_{\substack{A_1, A_2 \subseteq \chi_c(t) \\ A_1 \cap A_2 = A}} n(t_1, \alpha, A_1) \cdot n(t_2, \alpha, A_2)$$

Určení M_t pro zaváděcí uzel (proměnná)

3. Je-li t uváděcí uzel se synem t' a $\chi(t) = \chi(t') \cup \{x\}$ pro proměnnou $x \in \mathrm{var}(\varphi)$, pak

$$n(t, \alpha \cup \{(x,0)\}, A) = \begin{cases} 0 & (\exists C \in A)[\overline{x} \in C] \\ \sum_{B' \subseteq B} n(t', \alpha, A \cup B') & \text{jinak, kde} \\ & B = \{C \in \chi_c(t) \mid \overline{x} \in C\} \end{cases}$$

$$n(t, \alpha \cup \{(x,1)\}, A) = \begin{cases} 0 & (\exists C \in A)[x \in C] \\ \sum_{B' \subseteq B} n(t', \alpha, A \cup B') & \text{jinak, kde} \\ & B = \{C \in \chi_c(t) \mid x \in C\} \end{cases}$$

Určení M_t pro zaváděcí uzel (klauzule)

4. Je-li t uváděcí uzel se synem t' a $\chi(t) = \chi(t') \cup \{C\}$ pro klauzuli $C \in \varphi$, pak

$$n(t, \alpha, A) = \begin{cases} n(t', \alpha, A) & C \notin A \text{ a } C(\alpha) = 1 \\ n(t', \alpha, A \setminus \{C\}) & C \in A \text{ a } C(\alpha) \neq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určení M_t pro zapomínací uzel

5. Je-li t zapomínací uzel se synem t' a $\chi(t) = \chi(t') \setminus \{x\}$ pro nějakou proměnnou $x \in \mathrm{var}(\varphi)$, pak

$$n(t, \alpha, A) = n(t', \alpha \cup \{(x, 0)\}, A) + n(t', \alpha \cup \{(x, 1)\}, A)$$

6. Je-li t zapomínací uzel se synem t' a $\chi(t) = \chi(t') \setminus \{C\}$ pro nějakou klauzuli $C \in \varphi$, pak

$$n(t, \alpha, A) = n(t', \alpha, A)$$

Složitost #SAT($\mathbf{tw}^*$)

Věta 42 (Samer a Szeider, 2010)

Nechť φ je KNF formule, $T = (V', E')$ je stromová dekompozice incidenčního grafu $I(\varphi)$ šířky k s N vrcholy, potom

1. *Je-li $t \in V'$ uzel stromové dekompozice T formule φ, a máme-li již určeny tabulky $M_{t'}$ pro všechny syny t, pak tabulku M_t lze určit v čase $O(2^k(l + 2^k)k)$.*
2. *$|T(\varphi)|$ lze určit v čase $O(2^k(l + 2^k)kN)$.*

Hypotéza o exponenciálním čase

Hypotéza o exponenciálním čase

Následující hypotézy zavedli (Impagliazzo a Paturi, 2001):

Exponential Time Hypothesis (ETH)

Existuje konstanta $\varepsilon > 0$, pro kterou platí, že 3-SAT nelze vyřešit v čase $O^*(2^{\varepsilon n})$.

Strong Exponential Time Hypothesis (SETH)

Neexistuje algoritmus pro k-SAT, který pracuje v čase $O^*(2^{\delta n})$, kde $\delta < 1$ je konstanta, jež nezávisí na k.

Algoritmy pro 3-SAT

Randomizované algoritmy	
$1{,}3633^n$	(Paturi, Pudlik et al., 1998)
$1{,}33334^n$	(Schoning, 1999)
$1{,}32373^n$	(Iwama a Tamaki, 2004)
$1{,}30704^n$	(Hertli, 2014)
Deterministické algoritmy	
$1{,}6181^n$	(Monien a Speckenmeyer, 1985)
$1{,}5^n$	(Dantsin et al., 2002)
$1{,}481^n$	(Dantsin et al., 2002)
$1{,}3334^n$	(R. A. Moser a Scheder, 2011)
1.3303^n	(Makino, Tamaki a Yamamoto, 2011)
$1{,}30704^n$	(Rolf, 2005) (Unique k-SAT)

Schöningův algoritmus pro SAT

Schöningův algoritmus

Náhodná procházka po hyperkrychli

Funkce SchöningSAT(φ)

Vstup: Formule φ v k-KNF s n proměnnými.
Výstup: Splňující ohodnocení α, nebo NENALEZENO

1 Vyber náhodně počáteční ohodnocení $\alpha \in \{0,1\}^n$
2 **for** $i := 1$ **to** $3n$ **do**
3 **if** $\varphi(\alpha) = 1$ **then return** α
4 Vyber klauzuli $C \in \varphi$, pro kterou $C(\alpha) = 0$
5 Vyber nějakou proměnnou $x \in \mathrm{var}(C)$.
6 Polož $\alpha(x) := 1 - \alpha(x)$.
7 **end**

Vlastnosti náhodné procházky

Věta 43 (Schoning, 1999)

Uvažme k-KNF φ na n proměnných a předpokládejme, že je φ splnitelná, pak SchöningSAT(φ) najde splňující ohodnocení s pravděpodobností $p \geq \left(\frac{k}{2(k-1)}\right)^n$ (až na polynomiální faktor).

1. Opakujeme-li volání funkce SchöningSAT t-krát, pak pravděpodobnost, že nenajdeme splňující ohodnocení je nejvýš e^{-pt}.
2. Uvážíme-li $t = \frac{20}{p} = O^*\left(\frac{2(k-1)}{k}\right)^n$, pak pravděpodobnost neúspěchu je nejvýš e^{-20}.
3. Pro $k = 3$ dostáváme s tímto počtem opakování čas $O^*(t) = O^*\left(\left(2 * \frac{2}{3}\right)^n\right) = O^*(1{,}334^n)$

Derandomizace Schöningova algoritmu

Hammingovská vzdálenost a koule

Definice 44

- Jsou-li $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$ dva booleovské vektory, pak jejich hammingovskou vzdálenost $d_H(\alpha, \beta)$ definujeme jako počet pozic, ve kterých se liší, tedy

$$d_H(\alpha, \beta) = \left|\left\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \alpha[i] \neq \beta[i]\right\}\right|.$$

- Hammingovskou kouli $B_r(\alpha)$ o poloměru r kolem vektoru $\alpha \in \{0,1\}$ definujeme jako množinu vektorů v hammingovské vzdálenosti nejvýš r od α, tedy

$$B_r(\alpha) = \left\{\beta \in \{0,1\}^n \mid d_H(\alpha, \beta) \leq r\right\}.$$

Lokální prohledávání

Promise-Ball-k-SAT	
Instance	k-KNF φ na n proměnných, ohodnocení proměnných $\alpha \in \{0,1\}^n$ a poloměr $r \in \mathbb{N}$.
Cíl	Pokud existuje splňující ohodnocení $\beta \in B_r(\alpha)$, najdi nějaké splňující ohodnocení formule φ. (Ne nutně v $B_r(\alpha)$.)

Promise-Ball-k-SAT lze vyřešit deterministicky v čase

- $O^*(k^r)$ (Dantsin et al., 2002),
- $O^*\left((k-1+\varepsilon)^r\right)$ pro každé $\varepsilon > 0$ (R. A. Moser a Scheder, 2011).

Objem hamingovské koule

Definice 45

Pomocí $V(n,r)$ označíme objem hammingovské koule na n proměnných s poloměrem r.

- Platí

$$V(n,r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} .$$

- Pro $\rho = \frac{r}{n}$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{8n\rho(1-\rho)}} \cdot 2^{h(\rho)n} \leq V(n,r) \leq 2^{h(\rho)n} ,$$

kde $h(\rho) = -\rho \log_2 \rho - (1-\rho)\log_2(1-\rho)$ je entropická funkce.

Pokrývací kódy

Definice 46

Řekneme, že $C \subseteq \{0,1\}^n$ je pokrývací kód (*covering code*) C délky n s poloměrem r, pokud platí, že

$$\bigcup_{\alpha \in C} B_r(\alpha) = \{0,1\}^n.$$

$\rho = \frac{r}{n}$ je potom normalizovaný pokrývací poloměr C.

Lemma 47

Pro každé $n \geq 1$ a $0 \leq r \leq n$ existuje pokrývací kód délky n s poloměrem nejvýš r a velikostí

$$|C| \leq \left\lceil n \cdot \frac{2^n}{V(n,r)} \right\rceil,$$

Hledání pokrývacího kódu

Lemma 48

Nechť $0 < \rho < \frac{1}{2}$ *a nechť* $\beta(n) = \sqrt{n\rho(1-\rho)}$ *a nechť* $n \geq 1$, *potom:*

1. *Existuje pokrývací kód* C *délky* n *s poloměrem nejvýš* ρn *a velikostí nejvýš* $n\beta(n) \cdot 2^{(1-h(\rho))n}$.
2. *Pokrývací kód s poloměrem nejvýš* ρn *a velikostí nejvýš* $n^2\beta(n) \cdot 2^{(1-h(\rho))n}$ *lze najít v čase* $O^*(2^{3n})$.
3. *Je-li* $d \geq 2$ *dělitel čísla* n, *pak existuje polynom* $q_d(n)$ *takový, že pokrývací kód s poloměrem nejvýš* ρn *a velikostí nejvýš* $q_d(n) \cdot 2^{(1-h(\rho))n}$ *lze zkonstruovat v čase nejvýš* $q_d(n) \cdot (2^{3n/d} + 2^{(1-h(\rho))n})$.

Derandomizovaný algoritmus

Lemma 49 (Dantsin et al., 2002)

Pokud máme deterministický algoritmus A, který řeší PROMISE-BALL-k-SAT *v čase $O^*(a^r)$, pak existuje deterministický algoritmus B, který řeší k-SAT v čase $O^*\left(\left(\frac{2a}{a+1}\right)^n\right)$.*

- Pro k^r dostaneme čas $O^*\left(\left(\frac{2k}{k+1}\right)^n\right)$, pro $k = 3$ jde o $O^*(1{,}5^n)$.
- Pro $(k-1+\varepsilon)^r$ dostaneme čas $O^*\left(\left(\frac{2(k-1)}{k}+\varepsilon\right)^n\right)$, pro $k = 3$ jde o $O^*(1{,}334^n)$.

PPSZ, Hertli

Randomizované algoritmy pro SAT (PPSZ)

Věta 50 (Hertli, 2014; Paturi, Pudlák et al., 2005)

Existuje randomizovaný algoritmus pro 3*-SAT s jednostrannou chybou, který pracuje v čase* $1{,}30704^n$*.*

s-implikovaný literál

Definice 51

Nechť φ je splnitelná formule v KNF a $s \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo. Řekneme, že literál l je s-implikovaný, pokud existuje podformule $\psi \subseteq \varphi$, pro kterou platí, že $|\psi| \leq s$ a $\psi \models l$.

- 1-implikované literály jsou právě ty, které se vyskytují v jednotkových klauzulích.

PPSZ

Funkce PPSZ(φ, β, π, s)

Vstup: KNF φ, ohodnocení β, permutace π, $s \in \mathbb{N}$
Výstup: Ohodnocení α

1 $V \leftarrow \mathrm{var}(\varphi)$
2 $\alpha \leftarrow$ částečné ohodnocení V, na počátku prázdné
3 **foreach** $x \in V$ v pořadí dle π **do**
4 **while** existuje s-implikovaný literál l ve φ **do**
5 $\varphi \leftarrow \varphi[l]$
6 $\alpha(l) \leftarrow 1$
7 **end**
8 **if** $x \in \mathrm{var}(\varphi)$ **then**
9 $\varphi \leftarrow \varphi[x \leftarrow \beta(x)]$
10 $\alpha(x) \leftarrow \beta(x)$
11 **end**
12 **end**
13 **return** α

PPSZ-SAT

Algoritmus 2: PPSZ-SAT (φ, s)

Vstup: KNF φ, $s \in \mathbb{N}$
Výstup: Ohodnocení α

1 Vyber ohodnocení β náhodně s rovnoměrným rozdělením
2 Vyber permutaci π proměnných náhodně s rovnoměrným rozdělením
3 **return** PSSZ(φ, β, π, s)

Značení (pravděpodobnosti)

$$p_{\text{success}}(\varphi, s) = \Pr_{\beta,\pi}[\text{PPSZ}(\varphi, s) \text{ vrátí splňující ohodnocení}]$$

- Proměnná $x \in \text{var}(\varphi)$ je vynucená, pokud hodnota x je určena s-implikací.
- V opačném případě je x uhodnutá (guessed).
- Je-li α splňující ohodnocení φ, označím pravděpodobnost, že x je uhodnutá vzhledem k α pomocí:

$$p_{\text{guessed}}(\varphi, x, \alpha, s) = \Pr_{\pi}[x \text{ je uhodnutá v } \text{PPSZ}(\varphi, \alpha, \pi, s)].$$

Zmrzlé proměnné a splňující literály

Proměnná $x \in \mathrm{var}(\varphi)$ je zmrzlá (frozen, *backbone*), pokud $\varphi \models x$ nebo $\varphi \models \neg x$.

$\mathrm{var}_F(\varphi)$ Množina zmrzlých proměnných ve φ, $n_F(\varphi) = |\mathrm{var}_F(\varphi)|$.

$\mathrm{var}_N(\varphi)$ Množina proměnných, které nejsou zmrzlé ve φ, $n_N(\varphi) = |\mathrm{var}_N(\varphi)|$.

$\mathrm{SL}(\varphi)$ množina splňujících literálů, tedy takových literálů l, pro které je $\varphi[l]$ splnitelná.

Platí

$$|\mathrm{SL}(\varphi)| = 2n_N(\varphi) + n_F(\varphi).$$

Hádání zmrzlých proměnných

Věta 52 (Hertli, R. Moser a Scheder, 2011; Paturi, Pudlák et al., 2005)

Je-li x zrmzlá proměnná k-KNF φ, pak

$$p_{\text{guessed}}(\varphi, x, \alpha, s) \leq S_k + \epsilon_k(s),$$

kde

$$S_k = \int_0^1 \frac{t^{1/(k-1)} - t}{1-t} dt$$

a

$$\lim_{s \to \infty} \epsilon_k(s) = 0.$$

Hodnoty S_k a algoritmy pro k-SAT

k	S_k	2^{S_k}
3	0,3862944	1,307032
4	0,5548182	1,468984
5	0,6502379	1,569427
6	0,7118243	1,637874

Věta 53 (Hertli, 2014; Paturi, Pudlák et al., 2005)

For každé $\epsilon > 0$ existuje randomizovaný algoritmus pro k-SAT s jednostrannou chybou, který běží v čase $O(2^{S_k n + \epsilon n})$.

Základní vztahy s p_{guessed} a p_{success}

1. Nechť φ nemá s-implikované literály, pak

$$p_{\text{success}}(\varphi, s) = \frac{1}{2n} \sum_{l \in \text{SL}(\varphi)} p_{\text{success}}(\varphi[l], s).$$

2. Nechť α je model φ a $l \in \alpha$, pak pro každou proměnnou x

$$p_{\text{guessed}}(\varphi[l], x, \alpha, s) \leq p_{\text{guessed}}(\varphi, x, \alpha, s).$$

3. Nechť φ nemá s-implikované literály a $n = |\text{var}(\varphi)|$, pak pro každý model α a proměnnou x platí

$$p_{\text{guessed}}(\varphi, x, \alpha, s) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{l \in \alpha} p_{\text{guessed}}(\varphi[l], x, \alpha, s).$$

AssignSL(φ)

Algoritmus 3: AssignSL(φ)

1 $\alpha \leftarrow$ prázdné ohodnocení
2 **while** $\mathrm{var}(\varphi) \neq \emptyset$ **do**
3 Vyber náhodně literál $l \in \mathrm{SL}(\varphi)$
4 $\alpha \leftarrow \alpha \cup \{l\}$
5 $\varphi \leftarrow \varphi[l]$
6 **end**
7 **return** α

$p(\varphi, \alpha)$ pravděpodobnost, že AssignSL(φ) vrátí α (při restrikci na $\mathrm{var}(\varphi)$).

- $p(\varphi, \alpha)$ definuje pravděpodobnostní rozložení modelů φ.
- Je-li $\mathrm{var}(\varphi) = \emptyset$, pak $p(\varphi, \alpha) = 1$, jinak

$$p(\varphi, \alpha) = \frac{1}{\mathrm{SL}(\varphi)} \sum_{l \in \alpha} p(\varphi[l], \alpha).$$

Cena proměnné v k-KNF

Zafixujeme $s \in \mathbb{N}$ a $S = S_k + \epsilon_k(s)$ tak, aby $p_{\text{guessed}}(\varphi, x, \alpha, s) \leq S$ pro každou splnitelnou k-KNF φ a zmrzlou proměnnou x.

Definice 54

Pfo $\leq k$-KNF φ a proměnnou $x \in \text{var}(\varphi)$ definujeme

$$c(\varphi, x) = \begin{cases} 0 & x \notin \text{var}(\varphi) \\ S & x \in \text{var}_N(\varphi) \\ \sum_{\alpha \in T(\varphi)} p(\varphi, \alpha) p_{\text{guessed}}(\varphi, x, \alpha, s) & x \in \text{var}_F(\varphi) \end{cases}$$

Definujeme $c(\varphi) = \sum_{x \in \text{var}(\varphi)} c(\varphi, x)$.

Platí, že $c(\varphi, x) \leq S$ a $c(\varphi) \leq nS$, kde $n = |\text{var}(\varphi)|$.

Závislost úspěchu na ceně

Věta 55 (Hertli, 2014)

$$p_{\text{success}}(\varphi, s) \geq 2^{-c(\varphi)} \geq 2^{-nS}.$$

Algoritmy pro obecnou splnitelnost

Pravděpodobnostní algoritmus pro SAT

Vstup: Formule $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ v KNF na n proměnných. Počet klauzulí původní formule m_0.
Výstup: Splňující ohodnocení φ, nebo **nevím**.

1 **for** $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
2 **if** $|C_i| > 1 + \log m_0$ **then**
3 $D_i \leftarrow$ klauzule na prvních $1 + \log m_0$ literálech z C_i.
4 **else**
5 $D_i := C_i$
6 **end**
7 **end**
8 Vyřeš k-SAT s $k = 1 + \log m_0$ a formulí $\psi := \bigwedge_{i=1}^{m} D_i$
9 **if** bylo nalezeno ohodnocení α splňující ψ **then return** α
10 **if** $(\forall C \in \varphi)[|C| \leq 1 + \log m_0]$ **then return nevím**
11 Vyber uniformně náhodně klauzuli D_i velikosti $1 + \log m_0$
12 $\beta \leftarrow$ částečné ohodnocení přiřazující literálům v D_i nulu
13 Zavolej rekurzivně algoritmus na $\varphi[\beta]$.

Vlastnosti pravděpodobnostního algoritmu

Věta 56 (Schuler, 2005)

- *Algoritmus pracuje v polynomiálním čase.*
- *Pokud je formule φ splnitelná, pak algoritmus najde splňující ohodnocení s pravděpodobností alespoň $2^{-n(1-1/(1+\log_2 m))}$.*

- Je-li formule φ s n proměnnými a m klauzulemi splnitelná, pak lze splňující ohodnocení φ najít v očekávaném čase $O^*(2^{n(1-1/(1+\log m))})$.
- Pokud platí, že $m \leq n^c$ pro nějakou konstantu $c > 1$, pak lze splňující ohodnocení najít v očekávaném čase $O^*(2^{n(1-1/(1+c\log n))})$.

Algoritmy exponenciální v počtu klauzulí a délce formule

Autarky

Definice 57

Jsou-li φ a ψ formule, pak pomocí $\varphi \equiv_{SAT} \psi$ označíme fakt, že φ je splnitelná, právě když je splnitelná ψ.

Definice 58

Nechť φ je KNF, $B \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$ množina proměnných. Částečné ohodnocení $v : B \mapsto \{0, 1\}$ je autarky, pokud splňuje každou klauzuli $C \in \varphi$, pro kterou platí, že $B \cap \mathrm{var}(C) \neq \emptyset$.

Lemma 59

Je-li φ KNF a v autarky, pak

- $\varphi[v] \subseteq \varphi$ *a*
- $\varphi \equiv_{SAT} \varphi[v]$.

Čisté a singulární literály

Definice 60

- Literál x je čistý literál (*pure literal*), pokud se v φ nevyskytuje $\overline{x}$ (zatímco x se v φ vyskytuje).
- Řekneme, že literál x je singulární v KNF φ, pokud se x vyskytuje v právě jedné klauzuli φ, ale není to čistý literál.

- Je-li x čistý literál, pak částečné ohodnocení splňující právě jen x je autarky.

Rezoluce

Definice 61

- Řekneme, že klauzule C_1 a C_2 jsou rezolvovatelné, pokud mají konflikt v jediné proměnné x.
- Jejich rezolventou je klauzule $R(C_1, C_2) = (C_1 \cup C_2) \setminus \{x, \overline{x}\}$.
- Je-li φ formule, pak posloupnost klauzulí $C_1, \ldots, C_p$ je rezolučním odvozením klauzule C_p z φ, pokud pro každé $1 \leq i \leq p$ buď
  - $C_i \in \varphi$, nebo
  - $C_i = R(C_{j_1}, C_{j_2})$ pro nějaké indexy $j_1, j_2 < i$.
- Rezolučnímu odvození prázdné klauzule z φ, říkáme také rezoluční zamítnutí φ (*resolution refutation*).

- KNF φ je nesplnitelná, právě když má rezoluční zamítnutí.

DP rezoluce (Davisova-Putnamova)

Definice 62

Nechť φ je KNF a x je literál φ. Označme

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \{C \in \varphi \mid \{x, \overline{x}\} \cap C = \emptyset\} \\ \varphi_x &= \{C \in \varphi \mid x \in C\} \\ \varphi_{\overline{x}} &= \{C \in \varphi \mid \overline{x} \in C\} \end{aligned}$$

Pak DP rezolucí φ nazveme KNF

$$\begin{aligned} DP_x(\varphi) &= \varphi_0 \cup \\ &\cup \{R(C_1, C_2) \mid C_1 \in \varphi_x \wedge C_2 \in \varphi_{\overline{x}} \wedge C_1 \cap \overline{C_2} = \{x\}\} \end{aligned}$$

- Platí, že $\varphi \equiv_{SAT} DP_x(\varphi)$.
- Je-li x singulární literál, pak $|DP_x(\varphi)| < |\varphi|$.

Redukční pravidla

Eliminace jednotkových klauzulí Obsahuje-li φ jednotkovou klauzuli a (kde a je literál), pak $\varphi \equiv_{SAT} \varphi[a := 1]$.

Eliminace čistých literálů Je-li x čistý literál ve formuli φ, pak $\varphi \equiv_{SAT} \varphi[x := 1]$

Subsumpce Pokud φ obsahuje klauzule C a D, kde $C \subseteq D$, pak $\varphi \equiv_{SAT} \varphi \setminus \{D\}$.

Rezoluce se subsumpcí Pokud φ obsahuje klauzule C a D, kde $R(C, D) \subseteq D$, potom $\varphi \equiv_{SAT} (\varphi \setminus \{D\}) \cup \{R(C, D)\}$.

Eliminace proměnné rezolucí Je-li a proměnná φ, pak $\varphi \equiv_{SAT} DP_a(\varphi)$.

Blokované klauzule

Definice 63

- Klauzule C je blokovaná vzhledem k literálu a a formuli φ, pokud $a \in C$ a pro každou klauzuli D, kde $\overline{a} \in D$, platí, že $(D \cap \overline{C}) \setminus \{\overline{a}\} \neq \emptyset$.
- Pomocí γ_a označíme částečné ohodnocení, pro které platí, že $\gamma_a(x) = 1$ pro literál x, právě když $x = a$ nebo $(x \vee \overline{a})$ je blokovaná v φ vzhledem k $\overline{a}$.

Lemma 64

- *Je-li C blokovaná v φ vzhledem k literálu a, pak $\varphi \equiv_{SAT} \varphi \setminus \{C\} \equiv_{SAT} \varphi \cup \{C\}$.*
- *Je-li a literál φ, pak φ je splnitelná, právě když jedna z $\varphi[a := 0]$ a $\varphi[\gamma_a]$ je splnitelná.*

Princip černobílých literálů

- Nechť P je binární relace mezi literály a formulemi taková, že pro každý literál v platí $\neg P(v, \varphi) \vee \neg P(\overline{v}, \varphi)$.
- Předpokládejme, že pro každou klauzuli $C \in \varphi$ platí, že obsahuje-li literál w splňující $P(w, \varphi)$, pak také obsahuje literál b splňující $P(\overline{b}, \varphi)$.
- Označme α částečné ohodnocení splňující právě literály z množiny $\{v \mid P(\overline{v}, \varphi)\}$.

Lemma 65

Platí $\varphi \equiv_{SAT} \varphi[\alpha]$.

Značení velikosti klauzulí a počtu výskytů literálů

i-klauzule	obsahuje právě i literálů.
(i, j)-literál	se ve formuli vyskytuje i-krát pozitivně a j-krát negativně.
(i^+, j^-)-literál	se ve formuli vyskytuje alespoň i-krát pozitivně a nejvýš j-krát negativně.

Další kombinace jsou analogické.

- Pomocí $\tau(d_1, d_2, \ldots, d_i)$ označíme řešení rekurentní rovnice s větvícím vektorem $(d_1, d_2, \ldots, d_i)$. Jde tedy o kořen odpovídajícího charakteristického polynomu.

Algoritmus exponenciální v počtu klauzulí

Algoritmus 4: REDUCE-K

Vstup: Formule φ v KNF.
Výstup: Zredukovaná formule v KNF.

1 **while** Některé z následujících redukcí lze provést **do**
2 Eliminace jednotkových klauzulí. Je-li a jednotková klauzule φ, polož $\varphi := \varphi[a := 1]$.
3 Princip černobílých literálů. Pokud každá klauzule $C \in \varphi$, která obsahuje $(2, 3^+)$-literál, obsahuje též $(3^+, 2)$-literál, pak $\varphi := \varphi[\alpha]$, kde α je částečné ohodnocení splňující právě $(3^+, 2)$-literály.
4 Eliminace proměnné rezolucí. Vyber literál a takový, že a nebo $\overline{a}$ se vyskytuje v φ a $\Delta = |\varphi| - |DP_a(\varphi)|$ je maximální. Pokud je takových literálů víc, vyber takový, jehož počet výskytů je minimální. Pokud $\Delta \geq 0$, pak polož $\varphi := DP_a(\varphi)$.
5 **end**

Rozdělení na podpřípady (1. část)

Algoritmus 5: SPLIT-K (1. část)

Vstup: Formule φ v KNF.
Výstup: Pokud je φ splnitelná, tak TRUE, jinak FALSE.

```
1 if φ = ∅ then return TRUE
2 if ∅ ∈ φ then return FALSE
3 foreach x ∈ var(φ) do
4     φ_0 ← REDUCE-K(φ[x := 0])
5     φ_1 ← REDUCE-K(φ[x := 1])
6     if τ(|φ| − |φ_1|, |φ| − |φ_2|) ≤ τ(6, 7, 6, 7) then
7         return SPLIT-K(φ_0) or SPLIT-K(φ_1)
8     end
9 end
/* Pokračuje na další straně                    */
```

Rozdělení na podpřípady (2. část)

Algoritmus 6: SPLIT-K (2. část)

1 Vyber literál a, který se vyskytuje v φ.

2 Pro každé dva literály b a c, kde b se vyskytuje v $\varphi[a := 1]$ a c se vyskytuje v $\varphi[a := 0]$, zkonstruuj formule

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \text{REDUCE-K}(\varphi[a := 1, b := 1]) \\
\varphi_{12} &= \text{REDUCE-K}(\varphi[a := 1, b := 0]) \\
\varphi_{21} &= \text{REDUCE-K}(\varphi[a := 0, c := 1]) \\
\varphi_{22} &= \text{REDUCE-K}(\varphi[a := 0, c := 0]) \ .
\end{aligned}$$

3 Pokud pro nějaké literály b a c platí, že $\tau(|\varphi|-|\varphi_{11}|, |\varphi|-|\varphi_{12}|, |\varphi|-|\varphi_{21}|, |\varphi|-|\varphi_{22}|) \leq \tau(6,7,6,7)$, rozvětvi se na případy $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}$.

Odhad složitosti SPLIT-K

Věta 66 (Hirsch, 2000)

Algoritmus daný voláním SPLIT-K (REDUCE-K (φ)) pracuje korektně a vyžaduje čas $O^*(\tau(6{,}7{,}6{,}7)^{|\varphi|}) = O^*(2^{0{,}30897 \cdot |\varphi|})$.

Algoritmus exponenciální v délce formule

- Pomocí $||\varphi||$ označíme celkovou délku formule (součet délek klauzulí).
- Pomocí REDUCE-L (φ) označíme redukční proceduru, která provádí:
  1. Eliminaci jednotkových klauzulí.
  2. Eliminaci subsumpce.
  3. Eliminaci blokovaných klauzulí.
  4. Rezoluci se subsumpcí.
  5. Eliminaci proměnné rezolucí (jako v REDUCE-K).

SPLIT-L

Algoritmus 7: SPLIT-L

Vstup: Formule φ v KNF.
Výstup: Pokud je φ splnitelná, tak TRUE, jinak FALSE.

1 Prázdná formule. Pokud $\varphi = \emptyset$, vrať TRUE.
2 Prázdná klauzule. Pokud $\emptyset \in \varphi$, vrať FALSE.
3 Formule bez binárních klauzulí. Pokud φ neobsahuje klauzule délky 2, použij SPLIT-K (REDUCE-K (φ)).
4 Dva podpřípady. Pro každý literál a z φ zkonstruuj formule

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \text{REDUCE-L}(\varphi[\gamma_a]) \\ \varphi_2 &= \text{REDUCE-L}(\varphi[a := 0]) \ . \end{aligned}$$

5 Pokud pro nějaký literál platí, že $\tau(||\varphi|| - ||\varphi_1||, ||\varphi|| - ||\varphi_2||) \leq \tau(5, 17)$, zavolej rekurzivně funkci SPLIT-L na φ_1 a φ_2.

Odhad složitosti SPLIT-L

Věta 67 (Hirsch, 2000)

Algoritmus daný voláním SPLIT-L(REDUCE-L(φ)) pracuje korektně a vyžaduje čas $O^*(\tau(6,7,6,7)^{||\varphi||/3}) = O^*(2^{0{,}10299 \cdot ||\varphi||})$.

MaxSAT

MaxSAT

MaxSAT	
Instance	Booleovská formule φ v KNF s n proměnnými a m klauzulemi.
Cíl	Najít ohodnocení proměnných α, které maximalizuje počet splněných klauzulí ve formuli φ.

Max2SAT vstupem je 2-KNF.

Weighted MaxSAT každá klauzule má přiřazenou váhu, maximalizujeme součet vah splněných klauzulí.

Aproximace

Aproximační algoritmy

- Pro MaxSAT s faktorem $0{,}7584$ (Goemans a Williamson, 1995).
- Pro Max3SAT s faktorem $\frac{7}{8}$ (Karloff a Zwick, 1997) ($\frac{7}{8} = 0{,}875$).
- Pro Max2SAT s faktorem $0{,}878$ (Goemans a Williamson, 1994).

Neaproximovatelnost

- Max3SAT nelze aproximovat s faktorem $\left(\frac{7}{8} + \varepsilon\right)$ pro jakékoli $\varepsilon > 0$ (Håstad, 2001).
- Max2SAT nelze aproximovat s faktorem lepším než $\frac{21}{22} + \varepsilon$ pro jakékoli $\varepsilon > 0$ (Håstad, 2001).

Možné parametrizace MaxSAT

n	počet proměnných.
m	počet klauzulí.
ℓ	délka formule.
k	počet splněných klauzulí.
$k - \frac{m}{2}$	počet splněných klauzulí nad $m/2$.
$m - k$	počet nesplněných klauzulí.

Varianty a parametry MaxSAT

Parametr	Složitost	Zdroj
k	$O^*(1{,}3695^k)$	(Chen a Kanj, 2004)
$k' = k - \frac{m}{2}$	$O(\ell + k'^2 1{,}618^{6k'})$	(Mahajan a Raman, 1999)
m	$O^*(1{,}3247^m)$	(Chen a Kanj, 2004)
ℓ	$O^*(1{,}105729^\ell)$	(Bansal a Raman, 1999)
Max2SAT		
$k' = m - k$	$O(15^{k'} k' m^3)$	(Razgon a O'Sullivan, 2009)
m	$O^*(1{,}1487^m)$	(Gramm et al., 2003)
ℓ	$O^*(1{,}0718^\ell)$	(Gramm et al., 2003)

Algoritmus pro Weighted Max2SAT

Algoritmus pro WEIGHTED MAX2SAT

- Uvažujeme kladné celočíselné váhy klauzulí.
- Cílem je najít takové ohodnocení, které maximalizuje součet vah splněných klauzulí.
- Algoritmus konstruuje strom prohledávání, kde v listech jsou formule jen s jednotkovými klauzulemi.
- Jednotkové klauzule jsou proto nepodstatné.

Značení

(ω, C) klauzule C s vahou $\omega > 0$.

$(\omega, \top)$ speciální vážená klauzule, která je vždy splněná.

$\mathrm{OptVal}(\varphi)$ optimální hodnota pro formuli φ.

$K_2(\varphi)$ součet vah klauzulí délky 2 ve formuli φ.

$\#_l^{(k)}$ součet vah klauzulí délky k, v nichž se vyskytuje literál l.

$\#_l$ součet vah všech klauzulí, v nichž se vyskytuje literál l.

Váha proměnné x součet vah klauzulí délky 2, v nichž se vyskytuje proměnná x.

Operace s váženými formulemi

- Nechť φ, ψ jsou dvě vážené formule, l je literál.
- Pro účely následujících definic uvažujeme $(0, C) \in \varphi$ pro každou klauzuli C.

$$\varphi + \psi = \{(\omega_1 + \omega_2, C) \mid (\omega_1, C) \in \varphi \,\&\, (\omega_2, C) \in \psi \,\&\, \omega_1 + \omega_2 > 0\}$$

$$\varphi - \psi = \{(\omega_1 - \omega_2, C) \mid (\omega_1, C) \in \varphi \,\&\, (\omega_2, C) \in \psi \,\&\, \omega_1 - \omega_2 > 0\}$$

$$\varphi[l] = \left\{(\omega, C) \mid (\omega, C) \in \varphi \,\&\, l, \bar{l} \notin C\right\} + \left\{\left(\omega, C \setminus \{\bar{l}\}\right) \mid \bar{l} \in C \,\&\, |C| > 1\right\} + \left\{(\omega, \top) \mid \omega = \sum_{\substack{(\omega', C) \in \varphi \\ l \in C}} \omega'\right\}$$

Eliminace čistých literálů

- Pokud je a čistý literál v KNF φ, pak

$$\mathrm{OptVal}(\varphi) = \mathrm{OptVal}(\varphi[a]).$$

- Pravidlo $\mathbf{T}_{\mathrm{pure}}$ provede náhradu

$$\varphi \leftarrow \varphi[a].$$

Eliminace jednotkových klauzulí

- Předpokládejme, že ve formuli φ jsou dvě jednotkové klauzule (ω_1, a) a $(\omega_2, \overline{a})$ (kde a je literál).
- Pravidlo $\mathbf{T}_{\text{ann}}$ provede „anihilaci“ těchto klauzulí náhradou

$$\varphi \leftarrow (\varphi - \{(\omega, a), (\omega, \overline{a})\}) + (\omega, \top),$$

kde $\omega = \min(\omega_1, \omega_2)$.

Rezoluce vážených klauzulí

Jsou-li $C = (\omega_1, l_1 \vee l_2)$ a $D = (\omega_2, (\bar{l}_1 \vee l_3))$ dvě vážené klauzule, pak jejich rezolventu definujeme následujícím způsobem.

- Pokud $l_2 \neq \overline{l_3}$, pak

$$\mathcal{R}(C, D) = (\max(\omega_1, \omega_2), \top), (\min(\omega_1, \omega_2), (l_2 \vee l_3)).$$

- Pokud $l_2 = \overline{l_3}$, pak

$$\mathcal{R}(C, D) = (\omega_1 + \omega_2, \top).$$

Eliminace pomocí rezoluce

Pokud φ obsahuje dvě klauzule $C = (\omega_1, (v \vee l_1))$ a $D = (\omega_2, (\overline{v} \vee l_2))$, kde v je proměnná, jež se nevyskytuje v jiných klauzulích φ, pak

$$\mathrm{OptVal}(\varphi) = \mathrm{OptVal}\left((\varphi - \{C, D\}) + \mathcal{R}(C, D)\right).$$

Pravidlo $\mathbf{T}_{\mathrm{DP}}$ provede náhradu

$$\varphi \leftarrow (\varphi - \{C, D\}) + \mathcal{R}(C, D)$$

Dominující jednotkové klauzule

Je-li l literál a φ formule, kde $\#_l^{(1)} \geq \#_{\bar{l}}$, pak

$$\mathrm{OptVal}(\varphi) = \mathrm{OptVal}(\varphi[l]).$$

Pravidlo $\mathbf{T}_{\mathrm{dom}}$ provede náhradu

$$\varphi \leftarrow \varphi[l].$$

Eliminace malých uzavřených podformulí

Uzavřená podformule formule φ je podformule $\psi \subseteq \varphi$, jejíž proměnné se ve φ mimo ψ nevyskytují.

Malá uzavřená podformule má málo proměnných, například 12.

Je-li $\psi \subseteq \varphi$ malá uzavřená podformule formule φ, pak hodnotu $\mathrm{OptVal}(\psi)$ lze najít hrubou silou. Platí

$$\mathrm{OptValue}(\varphi) = \mathrm{OptValue}(\varphi - \psi) + \mathrm{OptValue}(\psi).$$

Pravidlo $\mathbf{T}_{\mathrm{small}}$ provede náhradu

$$\phi \leftarrow (\varphi - \psi) + (\mathrm{OptValue}(\psi), \top).$$

Eliminace vzácných proměnných

Nechť φ je 2-KNF a a je literál, který splňuje

$$\#_a^{(2)} = 2,\ \#_{\overline{a}}^{(2)} = \#_a^{(1)} = 0, \text{ a } \#_{\overline{a}}^{(1)} = 1.$$

Pravidlo $\mathbf{T}_{\mathrm{rare}}$ provede náhradu $\varphi \leftarrow \varphi'$, kde φ' vznikne z φ následujícím způsobem:

- Nechť $(\omega, (a \vee b))$ je binární klauzule obsahující a.
- Ve φ' nahradíme tuto klauzuli klauzulí $(\omega, \top)$, navíc
- nahradíme všechny výskyty literálu a literálem $\overline{b}$ a
- všechny výskyty literálu $\overline{a}$ nahradíme literálem b.

Pak $\mathrm{OptValue}(\varphi) = \mathrm{OptValue}(\varphi')$.

Algoritmus pro Max2SAT

Vstup: Vážená 2-KNF φ
Výstup: $\mathrm{OptVal}(\varphi)$

1 Opakuj použití pravidel $\mathbf{T}_{\mathrm{pure}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{ann}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{DP}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{dom}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{small}}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{rare}}$ na formuli φ dokud je to možné.
2 **if** $\varphi = (\omega, \top)$ **then return** ω
3 **if** $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ pro disjunktní uzavřené formule ψ_1, ψ_2 **then**
4 Přidej dvě nové proměnné u, v
5 **return**
$$\mathrm{OptVal}(\psi_1 + (1, (u \vee v))) + \mathrm{OptVal}(\psi_2 + (1, (u \vee v))) - 2$$
6 **end**
7 **if** φ obsahuje proměnnou v s vahou alespoň 5 **then**
8 **return** $\max(\mathrm{OptVal}(\varphi[v]), \mathrm{OptVal}(\varphi[\overline{v}]))$
9 **end**

Algoritmus pro MAX2SAT (2. část)

10 **if** všechny proměnné v φ mají váhu 4 **then**
11 Vyber libovolnou proměnnou v.
12 **return** $\max(\mathrm{OptVal}(\varphi[v]), \mathrm{OptVal}(\varphi[\overline{v}]))$
13 **end**
14 **if** φ obsahuje proměnné s vahami 3 nebo 4 **then**
15 Vyber proměnnou v, pro kterou platí, že po vhodné transformaci $\varphi[v]$ a $\varphi[\overline{v}]$ vzniknou formule ψ_1 a ψ_2, kde $K_2(\varphi) - K_2(\psi_i) \geq 5$ pro $i = 1, 2$ a navíc obě obsahují proměnnou s vahou nejvýš 3.
16 **return** $\max(\mathrm{OptVal}(\psi_1), \mathrm{OptVal}(\psi_2))$
17 **end**
18 Vyber proměnnou v, pro kterou platí, že po vhodné transformaci $\varphi[v]$ a $\varphi[\overline{v}]$ vzniknou formule ψ_1 a ψ_2, kde $K_2(\varphi) - K_2(\psi_i) \geq 5$ pro $i = 1, 2$.
19 **return** $\max(\mathrm{OptVal}(\psi_1), \mathrm{OptVal}(\psi_2))$

Vlastnosti algoritmu

Věta 68 (Gramm et al., 2003)

Nechť φ je vážená 2-KNF. Potom algoritmus pro MAX2SAT určí hodnotu $\mathrm{OptVal}(\varphi)$ v čase $\mathrm{poly}(|\varphi|) \cdot 2^{K_2(\varphi)/5}$.

Důsledek 69 (Gramm et al., 2003)

Nechť φ je nevážená 2-KNF. Potom algoritmus pro MAX2SAT určí hodnotu $\mathrm{OptVal}(\varphi)$ v čase $\mathrm{poly}(|\varphi|) \cdot 2^{||\varphi||/10}$.

Parametrizované algoritmy pro MaxSAT

Parametrizovaný algoritmus pro MaxSAT

Algoritmus 8: B-S-A

Vstup: Formule φ v KNF s m klauzulemi, parametr $k \geq 0$

Výstup: **true** pokud existuje ohodnocení α, které splní alespoň k klauzulí φ, jinak **false**

1 **if** $k > m$ **then return false**

2 **if** $k \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$ **then return true**

3 $\varphi_l \leftarrow \{C \in \varphi \mid |C| \geq k\}$ `/* Dlouhé klauzule */`

4 $\varphi_s \leftarrow \{C \in \varphi \mid |C| < k\}$ `/* Krátké klauzule */`

5 $b \leftarrow |\varphi_l|$ **if** $b \geq k$ **then return true**

6 Vyřeš MaxSAT(φ_s, $b - k$) voláním Short1 $(\varphi_s, b - k)$ nebo Short2 $(\varphi_s, b - k)$ (viz dále).

Krátké klauzule, verze 1

Funkce SHORT1(φ, k)

Vstup: Formule φ v KNF s m klauzulemi, parametr $k \geq 0$

Výstup: **true** pokud existuje ohodnocení α, které splní alespoň k klauzulí φ, jinak **false**

1 **if** $k > m$ **then return false**

2 **if** $k = 0$ **then return true**

3 **if** φ obsahuje jen čisté literály **then return true**

4 Vyber proměnnou x, která se v φ vyskytuje pozitivně i negativně.

5 **return** SHORT1 $(\varphi[x \leftarrow 1], k - \#_x)$ **or** SHORT1 $(\varphi[x \leftarrow 0], k - \#_{\overline{x}})$

B-S-A+Short1 (φ, k)

Věta 70 (Mahajan a Raman, 1999)

Kombinace algoritmu B-S-A s funkcí Short1 (φ, k) *rozhodne* MaxSAT(φ, k) *v čase* $O(k^2 2^k + \|\varphi\|)$. *Je-li* φ *formule v* c*-KNF, pak algoritmus pracuje v čase* $O(ck2^k + \|\varphi\|)$.

Krátké klauzule, verze 2

Funkce SHORT2(φ, k)

Vstup: Formule φ v KNF s m klauzulemi, parametr $k \geq 0$
Výstup: **true** pokud existuje ohodnocení α, které splní alespoň k klauzulí φ, jinak **false**

1 **if** $k > m$ **then return false**
2 **if** $k = 0$ **then return true**
3 Vyber proměnnou x, pro niž je $\#_x + \#_{\overline{x}}$ maximální.
4 **if** $\#_x + \#_{\overline{x}} \leq 2$ **then**
5 Vyřeš přímo MAXSAT(φ) v polynomiálním čase
6 **end**
7 **return** SHORT2 $(\varphi[x \leftarrow 1], k - \#_x)$ **or** SHORT2 $(\varphi[x \leftarrow 0], k - \#_{\overline{x}})$

B-S-A+Short2 (φ, k)

Lemma 71 (Raman, Ravikumar a Rao, 1998)

Je-li φ formule v KNF, pro kterou platí, že každá proměnná $x \in \mathrm{var}(\varphi)$ se vyskytuje v nejvýš dvou klauzulích φ, pak lze MaxSAT(φ) vyřešit v čase $|\varphi|$.

Věta 72 (Mahajan a Raman, 1999)

Kombinace algoritmu B-S-A s funkcí Short2 (φ, k) rozhodne MaxSAT(φ, k) v čase $O(k^2\phi^k + |\varphi|)$, kde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je hodnota zlatého řezu. Je-li φ formule v c-KNF, pak algoritmus pracuje v čase $O(ck\phi^k + \|\varphi\|)$.

Parametrizace MaxSAT nad zaručenou hodnotu

Algoritmus 9: L-S-A

Vstup: Formule φ v KNF s n proměnnými a m klauzulemi, parametr k.

Výstup: **true** pokud lze v φ splnit alespoň $T = \lceil \frac{m}{2} \rceil + k$ klauzulí, jinak **false**

1 $U \leftarrow \{C \in \varphi \mid |C| = 1\}$
2 $N \leftarrow \{C \in \varphi \mid |C| > 1\}$
3 **if** $N = \emptyset$ **then** vyřeš MaxSAT(φ) přímo
4 **if** $|N| \geq 4k + 4$ **then return true**
5 **while** U obsahuje klauzule x a $\overline{x}$ **do**
6 Odstraň klauzule x a $\overline{x}$ z φ
7 $T \leftarrow T - 1$
8 **end**
9 **if** $|U| \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil + k$ **then return true**
10 **return** B-S-A+Short2 (φ, T)

Lemma 73

Nechť φ je KNF s m klauzulemi, jež obsahuje p klauzulí, které nejsou jednotkové. Pak existuje ohodnocení α, které splní alespoň $\lceil \frac{m}{2} \rceil + \frac{p}{4} - 1$ klauzulí φ. Toto ohodnocení lze nalézt v lineárním čase.

Věta 74 (Mahajan a Raman, 1999)

Algoritmus $L - S - A$ se vstupem φ a k rozhodne, zda existuje ohodnocení α, jež splní alespoň $\lceil \frac{m}{2} \rceil + k$ klauzulí v čase $O(k^2 \phi^{6k} + |\varphi|)$, kde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je hodnota zlatého řezu.

MaxSAT rezoluce

MaxSAT rezoluce (Bonet, Levy a Manyà, 2007)

- Uvažujeme variantu MaxSAT, kdy minimalizujeme počet nesplněných klauzulí.
- Klauzule se může ve formuli vyskytovat vícekrát.
- Rezoluce je transformační pravidlo, nahradí formuli φ formulí φ'.
- Rezoluční pravidla jsou korektní, pokud zachovávají počet nesplněných klauzulí pro každé ohodnocení α.
- Rezoluční pravidla jsou úplná, pokud jimi lze z φ odvodit formuli $\varphi_0 \wedge \varphi_1$, kde φ_0 se skládá z p prázdných klauzulí a φ_1 je splnitelná formule, kde p je počet nesplněných klauzulí v optimálním řešení.

Rezoluční pravidlo

$$\frac{x \vee a_1 \vee \cdots \vee a_s \qquad \overline{x} \vee b_1 \vee \cdots \vee b_t}{\begin{array}{l} a_1 \vee \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \cdots \vee b_t \\ x \vee a_1 \cdots \vee a_s \vee \overline{b_1} \\ x \vee a_1 \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \overline{b_2} \\ \ldots \\ x \vee a_1 \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \cdots \vee b_{t-1} \vee \overline{b_t} \\ \overline{x} \vee b_1 \cdots \vee b_t \vee \overline{a_1} \\ \overline{x} \vee b_1 \cdots \vee a_t \vee a_1 \vee \overline{a_2} \\ \ldots \\ \overline{x} \vee b_1 \cdots \vee b_t \vee a_1 \vee \cdots \vee a_{s-1} \vee \overline{a_s} \end{array}}$$

Rezoluční pravidlo pro vážený MaxSAT

$$\frac{(x \vee a_1 \vee \cdots \vee a_s, u) \quad (\overline{x} \vee b_1 \vee \cdots \vee b_t, w)}{\begin{array}{l}(a_1 \vee \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \cdots \vee b_t, \min(u,w)) \\ (x \vee a_1 \cdots \vee a_s, u - \min(u,w)) \\ (\overline{x} \vee b_1 \cdots \vee b_t, w - \min(u,w)) \\ (x \vee a_1 \cdots \vee a_s \vee \overline{b_1}, \min(u,w)) \\ (x \vee a_1 \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \overline{b_2}, \min(u,w)) \\ \ldots \\ (x \vee a_1 \cdots \vee a_s \vee b_1 \vee \cdots \vee b_{t-1} \vee \overline{b_t}, \min(u,w)) \\ (\overline{x} \vee b_1 \cdots \vee b_t \vee \overline{a_1}, \min(u,w)) \\ (\overline{x} \vee b_1 \cdots \vee a_t \vee a_1 \vee \overline{a_2}, \min(u,w)) \\ \ldots \\ (\overline{x} \vee b_1 \cdots \vee b_t \vee a_1 \vee \cdots \vee a_{s-1} \vee \overline{a_s}, \min(u,w))\end{array}}$$

Heuristické algoritmy pro MaxSAT

Větvi a prořezávej

Branch and Bound

Další popis viz kapitola číslo 19 v (Biere et al., 2009).

Funkce MaxSAT(φ, U)

Vstup: KNF φ, horní odhad U
Výstup: Minimální počet nesplněných klauzulí v φ

```
1  φ ← SimplifyFormula(φ)
2  if φ = ∅ or φ obsahuje jen prázdné klauzule then
3      return |EmptyClauses(φ)|
4  end
5  L ← |EmptyClauses(φ)| + Underestimation(φ)
6  if L ≥ U then return U
7  x ← SelectVariable(φ)
8  U ← min(U, MaxSAT(φ[x ← 0], U))
9  return min(U, MaxSAT(φ[x ← 1], U))
```

Underestimation (φ)

Dolní odhad na počet neprázdných klauzulí, které nelze splnit.

- Počet dvojic literálů x a $\overline{x}$
- Počet podformulí typu $\{l_1, \ldots, l_k, \overline{l_1} \vee \cdots \vee \overline{l_k}\}$ (pro $k = 1$ jde o *star rule*)
- Odhad pomocí jednotkové propagace
- Odhad pomocí jednotkové propagace spolu s *failed literály*
- Zaokrouhlení lineární relaxace celočíselného programu pro MaxSAT(φ)
- Transformační pravidla

SelectVariable (φ)

- Preference literálů, které mají více výskytů.
- MaxSatz:

  $\mathrm{neg1}(x)$, $\mathrm{pos1}(x)$ Počet výskytů $\overline{x}$, x v jednotkových klauzulích

  $\mathrm{neg2}(x)$, $\mathrm{pos2}(x)$ Počet výskytů $\overline{x}$, x v binárních klauzulích

  $\mathrm{neg3}(x)$, $\mathrm{pos3}(x)$ Počet výskytů $\overline{x}$, x v klauzulích délky alespoň 3.

  Vybíráme proměnnou s maximální hodnotou

$$(\mathrm{neg1}(x)+4\cdot\mathrm{neg2}(x)+\mathrm{neg3}(x))\cdot(\mathrm{pos1}(x)+4\cdot\mathrm{pos2}(x)+\mathrm{pos3}(x))$$

Algoritmy založené na volání SAT

Částečný MaxSAT (*partial MaxSAT*)

Dva typy klauzulí:

hard Musí být splněny

- Můžeme pro ně použít silnější transformační pravidla, například jednotkovou propagaci

soft Chceme jich splnit co nejvíce (nesplnit co nejméně)

- Mohou být vážené

Přehled algoritmů založených na volání SAT viz (Morgado et al., 2013).

Relaxační proměnné

Ke soft klauzulí přidáme nové relaxační proměnné a omezíme počet splněných relaxačních proměnných.

Funkce RelaxCls(R, φ, ψ)

Vstup: Množina relaxačních proměnných R, (vážené) KNF formule φ, ψ, kde $\psi \subseteq \varphi$

Výstup: Nové hodnoty R a φ

1 $(R_0, \varphi_0) \leftarrow (R, \varphi)$

2 **foreach** $(C, w) \in \text{Soft}(\psi)$ **do**

3 $\quad R_o \leftarrow R_o \cup \{r\}$ `// r je nová proměnná`

4 $\quad C_R \leftarrow C \cup \{r\}$

5 $\quad \varphi_o \leftarrow \varphi_o \setminus \{(C, w)\} \cup \{(C_R, w)\}$ `// (C_R, w) je soft`

6 **end**

Před spuštěním algoritmu pro MaxSAT

1. Volání SAT na hard klauzule φ.
2. Heuristické určení dolního odhadu na počet nesplněných klauzulí. (Dle potřeby.)
3. Heuristické určení horního odhadu na počet nesplněných klauzulí. (Dle potřeby.)

Iterativní algoritmy

Lineární Unsat-Sat Průběžně zvyšují dolní odhad počtu nesplněných klauzulí

Lineární Sat-Unsat Průběžně snižují horní odhad počtu nesplněných klauzulí

Binární prohledávání Provádějí binární vyhledávání v intervalu daném dolním a horním odhadem.

Lineární Unsat-Sat algoritmus

Algoritmus 10: Lineární Unsat-Sat algoritmus

Vstup: KNF φ

1 $(R, \varphi_w) \leftarrow$ RelaxCls $(\emptyset, \varphi, \mathrm{Soft}(\varphi))$
2 $\lambda \leftarrow 0$
3 **while true do**
4 $\quad (\mathrm{st}, \alpha) \leftarrow \mathrm{SAT}(\varphi_w \cup \mathrm{CNF}(\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot r_i \leq \lambda))$
5 $\quad$ **if** $\mathrm{st} = \mathrm{SAT}$ **then return** α
6 $\quad \lambda \leftarrow$ RefineBound $(\{w_i \mid 1 \leq i \leq m\}, \lambda)$
7 **end**

Lineární Sat-Unsat algoritmus

Algoritmus 11: Lineární Sat-Unsat algoritmus

Vstup: KNF φ

1 $(R, \varphi_w) \leftarrow$ RelaxCls $(\emptyset, \varphi, \mathrm{Soft}(\varphi))$
2 $(\alpha, \mu) \leftarrow (\emptyset, 1 + \sum_{i=1}^{m} w_i)$
3 **while true do**
4 $\quad (\mathrm{st}, \alpha') \leftarrow \mathrm{SAT}(\varphi_w \cup \mathrm{CNF}(\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot r_i \leq \mu - 1))$
5 $\quad$ **if** $\mathrm{st} = \mathrm{UNSAT}$ **then return** α
6 $\quad (\alpha, \mu) \leftarrow (\alpha', \mu - 1)$
7 **end**

Vylepšený lineární Sat-Unsat algoritmus

Algoritmus 12: Vylepšený lineární Sat-Unsat algoritmus

Vstup: KNF φ

1 $(R, \varphi_w) \leftarrow$ RelaxCls $(\emptyset, \varphi, \mathrm{Soft}(\varphi))$
2 $(\alpha, \mu) \leftarrow (\emptyset, 1 + \sum_{i=1}^{m} w_i)$
3 **while true do**
4 $\quad (\mathrm{st}, \alpha') \leftarrow \mathrm{SAT}(\varphi_w \cup \mathrm{CNF}(\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot r_i \leq \mu - 1))$
5 $\quad$ **if** $\mathrm{st} = \mathrm{UNSAT}$ **then return** α
6 $\quad (\alpha, \mu) \leftarrow (\alpha', \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot (1 - \alpha(C_i \setminus \{r_i\})))$
7 **end**

Binární prohledávání

Algoritmus 13: Binárním prohledávání

Vstup: KNF φ

1 $(R, \varphi_w) \leftarrow \textsc{RelaxCls}(\emptyset, \varphi, \text{Soft}(\varphi))$
2 $(\alpha, \mu, \lambda) \leftarrow (\emptyset, 1 + \sum_{i=1}^{m} w_i, -1)$
3 **while** $\lambda + 1 < \mu$ **do**
4 $\quad \nu \leftarrow \lfloor \frac{\mu+\lambda}{2} \rfloor$
5 $\quad (\text{st}, \alpha') \leftarrow \text{SAT}(\varphi_w \cup \text{CNF}(\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot r_i \leq \nu))$
6 $\quad$ **if** $\text{st} = \text{SAT}$ **then**
7 $\quad\quad (\alpha, \mu) \leftarrow (\alpha', \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot (1 - \alpha(C_i \setminus \{r_i\})))$
8 $\quad$ **else**
9 $\quad\quad \lambda \leftarrow \textsc{RefineBound}(\{w_i \mid 1 \leq i \leq m\}, \nu) - 1$
10 $\quad$ **end**
11 **end**
12 **return** α

Algoritmy řízené nesplnitelnými podformulemi

- Relaxační proměnné se nepřidávají hned ke všem soft klauzulím, ale až dle potřeby.
- Je-li φ nesplnitelná, pak její nesplnitelné jádro je minimální nesplnitelná $\varphi_c \subseteq \varphi$.
- Přidáme relaxační proměnné k klauzulím v φ_c a podmínku, která vynucuje, že nejvýš jedna z těchto proměnných může být splněna.
- SAT solvery mohou vydat φ_c jako součást svého výstupu.
- K jedné klauzuli může být přidáno několik relaxačních proměnných.

WMSU1

1 $\varphi_w \leftarrow \varphi$
2 **while true do**
3 $(\mathrm{st}, \varphi_c, \alpha) \leftarrow \mathrm{SAT}(\varphi_w)$
4 **if** $\mathrm{st} = \mathrm{SAT}$ **then return** α
5 $(R, w_m) \leftarrow (\emptyset, \min\{w \mid (C, w) \in \mathrm{Soft}(\varphi_c)\})$
6 **foreach** $(C, w) \in \mathrm{Soft}(\varphi_c)$ **do**
7 $r \leftarrow$ nová relaxační proměnná
8 $R_C \leftarrow$ Relaxační proměnné v C
9 $(R, C_r, w_r) \leftarrow (R \cup \{r\}, C \cup \{r\}, w_m)$
10 $\varphi_w \leftarrow \varphi_w \setminus \{(C, w)\} \cup \{(C_r, w_r)\}$
$[\cup \mathrm{CNF}(r + \sum_{r_j \in R_C} r_j \leq 1)]$
11 **if** $w > w_m$ **then** $\varphi_w \leftarrow \varphi_w \cup \{(C, w - w_m)\}$
12 **end**
13 $\varphi_w \leftarrow \varphi_w \cup \mathrm{CNF}(\sum_{r \in R} r \leq 1)$
14 **end**

WMSU3

1 $(R, \varphi_w, \lambda) \leftarrow (\emptyset, \varphi, 0)$
2 **while true do**
3 $\quad (\mathrm{st}, \varphi_c, \alpha) \leftarrow \mathrm{SAT}(\varphi_w \cup \mathrm{CNF}(\sum_{i:r_i \in R} w_i \cdot r_i \leq \lambda))$
4 $\quad$ **if** $\mathrm{st} = \mathrm{SAT}$ **then return** α
5 $\quad (R, \varphi_w) \leftarrow$ RelaxCls$(R, \varphi_w, \mathrm{Soft}(\varphi_c \cap \varphi))$
6 $\quad \lambda \leftarrow$ RefineBound$(\{w_i \mid r_i \in R\}, \lambda)$
7 **end**

WMSU4

1 $(\varphi_w, R, \lambda, \mu, \alpha) \leftarrow (\varphi, \emptyset, -1, 1 + \sum_{i=1}^{m} w_i, \emptyset)$
2 **while** $\mu > \lambda + 1$ **do**
3 $\quad (\mathrm{st}, \varphi_c \alpha') \leftarrow \mathrm{SAT}(\varphi_w \cup \mathrm{CNF}(\sum_{i:r_i \in R} w_i \cdot r_i \leq \mu - 1))$
4 $\quad$ **if** $\mathrm{st} = \mathrm{SAT}$ **then**
5 $\quad\quad (\alpha, \mu) \leftarrow (\alpha', \sum_{i:r_i \in R} w_i \cdot (1 - \alpha(C_i \setminus \{r_i\})))$
6 $\quad$ **else**
7 $\quad\quad (I, \varphi_w) \leftarrow$ RelaxCls$(\emptyset, \varphi_w, \mathrm{Soft}(\varphi_c \cap \varphi))$
8 $\quad\quad$ **if** $I = \emptyset$ **then**
9 $\quad\quad\quad \lambda \leftarrow \mu - 1$
10 $\quad\quad$ **else**
11 $\quad\quad\quad R \leftarrow R \cup I$
12 $\quad\quad\quad \lambda \leftarrow$ RefineBound$(\{w_i \mid r_i \in R \cup I\}, \lambda)$
$\quad\quad\quad\quad [\cup \mathrm{CNF}(\sum_{r \in I} r \geq 1)]$
13 $\quad\quad$ **end**
14 $\quad$ **end**
15 **end**
16 **return** α

BIN-C

1 $(R, \varphi_w, \varphi_S) \leftarrow (\emptyset, \varphi, \text{Soft}(\varphi))$
2 $(\lambda, \mu, \alpha) \leftarrow (-1, 1 + \sum_{i=1}^{m} w_i, \emptyset)$
3 **while** $\lambda + 1 < \mu$ **do**
4 $\quad \nu \leftarrow \lfloor \frac{\mu+\lambda}{2} \rfloor$
5 $\quad (\text{st}, \varphi_C, \alpha') \leftarrow \text{SAT}(\varphi_w \cup \text{CNF}(\sum_{r_i \in R} w_i \cdot r_i \leq \nu))$
6 $\quad$ **if** $\text{st} = \text{SAT}$ **then**
7 $\quad\quad (\alpha, \mu) \leftarrow (\alpha', \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot (1 - \alpha(C_i \setminus \{r_i\})))$
8 $\quad$ **else if** $\varphi_C \cap \varphi_S = \emptyset$ **then**
9 $\quad\quad \lambda \leftarrow$ RefineBound $(\{w_i \mid w_i \in R\}, \nu) - 1$
10 $\quad$ **else**
11 $\quad\quad (R, \varphi_w) \leftarrow$ RelaxCls $(R, \varphi_w, \varphi_C \cap \varphi_S)$
12 $\quad$ **end**
13 **end**
14 **return** α

Další vylepšení

- Disjunktní nesplnitelná jádra
- Bit-based search

- Další popis algoritmů pro MaxSAT viz kapitola číslo 19 v (Biere et al., 2009).
- Přehled algoritmů založených na volání SAT viz (Morgado et al., 2013).

Literatura

Literatura I


Bansal, Nikhil a Venkatesh Raman (1999). „Upper Bounds for MaxSat: Further Improved“. In: *Lecture Notes in Computer Science*, s. 247–258. ISSN: 0302-9743. DOI: 10.1007/3-540-46632-0_26.


Biere, A. et al. (2009). *Handbook of Satisfiability*. Sv. 185. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. Amsterdam, The Netherlands: IOS Press. ISBN: 1586039296, 9781586039295.


Bodlaender, Hans L (1996). „A Linear-Time Algorithm for Finding Tree-Decompositions of Small Treewidth“. In: *SIAM Journal on Computing* 25.6, s. 1305–1317.

Literatura II

- Bonet, María Luisa, Jordi Levy a Felip Manyà (2007). „Resolution for Max-SAT“. In: *Artificial Intelligence* 171.8, s. 606–618. ISSN: 0004-3702. DOI: https://doi.org/10.1016/j.artint.2007.03.001.
- Crama, Yves, Oya Ekin a Peter L Hammer (červ.). „Variable and term removal from Boolean formulae“. In: *Discrete Applied Mathematics* 75.3, s. 217–230. ISSN: 0166-218X. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X(96)00028-5.
- Dantsin, Evgeny et al. (2002). „A deterministic (2- 2/(k+ 1)) n algorithm for k-SAT based on local search“. In: *Theoretical Computer Science* 289.1, s. 69–83.
- Fomin, Fedor V. et al. (2008). „Exact Algorithms for Treewidth and Minimum Fill-In“. In: *SIAM Journal on Computing* 38.3, s. 1058–1079. DOI: 10.1137/050643350.

Literatura III

- Goemans, Michel X a David P Williamson (1994). „New 3/4-approximation algorithms for the maximum satisfiability problem“. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7.4, s. 656–666.
- – (1995). „Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming“. In: *Journal of the ACM (JACM)* 42.6, s. 1115–1145.
- Gramm, Jens et al. (srp. 2003). „Worst-case upper bounds for MAX-2-SAT with an application to MAX-CUT“. In: *Discrete Applied Mathematics* 130.2, s. 139–155. ISSN: 0166-218X. DOI: 10.1016/s0166-218x(02)00402-x.
- Håstad, Johan (čvc 2001). „Some optimal inapproximability results“. In: *Journal of the ACM* 48.4, s. 798–859. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/502090.502098.

Literatura IV

- Hertli, Timon (2014). „3-SAT Faster and Simpler—Unique-SAT Bounds for PPSZ Hold in General“. In: *SIAM Journal on Computing* 43.2, s. 718–729.
- Hertli, Timon, Robin Moser a Dominik Scheder (2011). „Improving PPSZ for 3-SAT using Critical Variables“. In: *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS2011)*. Sv. 9, s. 237–248.
- Hirsch, EdwardA. (2000). „New Worst-Case Upper Bounds for SAT“. English. In: *Journal of Automated Reasoning* 24.4, s. 397–420. ISSN: 0168-7433. DOI: 10.1023/A:1006340920104.
- Chen, Jianer a Iyad A Kanj (srp. 2004). „Improved exact algorithms for MAX-SAT“. In: *Discrete Applied Mathematics* 142.1-3, s. 17–27. ISSN: 0166-218X. DOI: 10.1016/j.dam.2003.03.002.

Literatura V

- Impagliazzo, Russell a Ramamohan Paturi (2001). „On the Complexity of k-SAT“. In: *Journal of Computer and System Sciences* 62.2, s. 367–375. ISSN: 0022-0000. DOI: http://dx.doi.org/10.1006/jcss.2000.1727.
- Iwama, Kazuo a Suguru Tamaki (2004). „Improved upper bounds for 3-SAT“. In: *SODA*. Sv. 4, s. 328–328.
- Karloff, Howard a Uri Zwick (1997). „A 7/8-approximation algorithm for MAX 3SAT?“ In: *Foundations of Computer Science, 1997. Proceedings., 38th Annual Symposium on*. IEEE, s. 406–415.
- Mahajan, Meena a Venkatesh Raman (květ. 1999). „Parameterizing above Guaranteed Values: MaxSat and MaxCut“. In: *Journal of Algorithms* 31.2, s. 335–354. ISSN: 0196-6774. DOI: 10.1006/jagm.1998.0996.

Literatura VI


Makino, Kazuhisa, Suguru Tamaki a Masaki Yamamoto (2011). „Derandomizing HSSW Algorithm for 3-SAT“. In: *Computing and Combinatorics: 17th Annual International Conference, COCOON 2011, Dallas, TX, USA, August 14-16, 2011. Proceedings*. Ed. Bin Fu a Ding-Zhu Du. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, s. 1–12. ISBN: 978-3-642-22685-4. DOI: 10.1007/978-3-642-22685-4_1.


Monien, B. a E. Speckenmeyer (1985). „Solving satisfiability in less than 2n steps“. In: *Discrete Applied Mathematics* 10.3, s. 287–295. ISSN: 0166-218X. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X(85)90050-2.

Literatura VII

- Morgado, Antonio et al. (říj. 2013). „Iterative and core-guided MaxSAT solving: A survey and assessment“. In: *Constraints* 18.4, s. 478–534. ISSN: 1572-9354. DOI: 10.1007/s10601-013-9146-2.
- Moser, Robin A a Dominik Scheder (2011). „A full derandomization of Schöning's k-SAT algorithm“. In: *Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM, s. 245–252.
- Nishimura, Naomi, Prabhakar Ragde a Stefan Szeider (2004). „Detecting Backdoor Sets with Respect to Horn and Binary Clauses.“. In: *SAT* 4, s. 96–103.
- – (2007). „Solving #SAT using vertex covers“. In: *Acta Informatica* 44.7-8, s. 509–523.

Literatura VIII


Paturi, Ramamohan, Pavel Pudlák et al. (květ. 2005). „An Improved Exponential-time Algorithm for k-SAT“. In: *J. ACM* 52.3, s. 337–364. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/1066100.1066101.


Paturi, Ramamohan, P Pudlik et al. (1998). „An improved exponential-time algorithm for k-SAT“. In: *Foundations of Computer Science, 1998. Proceedings. 39th Annual Symposium on*. IEEE, s. 628–637.


Raman, Venkatesh, B. Ravikumar a S. Srinivasa Rao (1998). „A simplified NP-complete MAXSAT problem“. In: *Information Processing Letters* 65.1, s. 1–6. ISSN: 0020-0190. DOI: https://doi.org/10.1016/S0020-0190(97)00223-8.

Literatura IX


Razgon, Igor a Barry O'Sullivan (2009). „Almost 2-SAT is fixed-parameter tractable". In: *Journal of Computer and System Sciences* 75.8, s. 435–450. ISSN: 0022-0000. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jcss.2009.04.002.


Rolf, Daniel (2005). „Derandomization of PPSZ for Unique-k-SAT". In: *Lecture Notes in Computer Science*, s. 216–225. ISSN: 1611-3349. DOI: 10.1007/11499107_16.


Samer, Marko a Stefan Szeider (břez. 2010). „Algorithms for propositional model counting". In: *Journal of Discrete Algorithms* 8.1, s. 50–64.


Schoning, T (1999). „A probabilistic algorithm for k-SAT and constraint satisfaction problems". In: *Foundations of Computer Science, 1999. 40th Annual Symposium on*. IEEE, s. 410–414.

Literatura X


Schuler, Rainer (2005). „An algorithm for the satisfiability problem of formulas in conjunctive normal form“. In: *Journal of Algorithms* 54.1, s. 40–44.


Villanger, Yngve (2006). „Improved exponential-time algorithms for treewidth and minimum fill-in“. In: *LATIN 2006: Theoretical Informatics*. Springer, s. 800–811.