Cvičení z logiky 1

Marta Vomlelová

Výklad:
https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=10297
Zapište sama sebe do skupiny 22vomSt, 22vomPa
16.11.2022 resp. 11.11.2022 a poslední cvičení písemky 45 min, pak výklad.
za aktivní účast trochu bodů navíc.

Konzultace: Středa 13:00-13:45 v S303 nebo po domluvě e-mailem.

Výklad: formule, logické spojky

- priorita:
  - nejnižší → ↔
  - & ∧ ∨
  - nejvyšší ¬
- Implikace je ZPRAVA asociativní

0a) Uzávorkujte formuli, aby byla zřejmá priorita a asociativita operací
p->q->r->¬ s & q
0b) nakreslete vytvořující strom pro uvedenou formuli. # (viz přednáška)

1. Sestrojte pravdivostní tabulky pro následující formule:
(tj. Určete pravdivostní hodnotu pro všechna možná ohodnocení prvovýroků)
a) p&q
b) p → q
c) ((p → q) → p) → p
d) ¬(p ∨q) ↔ ¬p&¬q
e) (p → q → r) → (p → q) → (p → r)

1) abc

ohodnocení	p	q	p&q	p->q	((p->q)->p)	((p->q)->p)->p
v_1	0	0	0	1		
v_4	0	1	0	1		
v_3	1	0	0	0		
v_4	1	1	1	1		

1) d

p	q	(p ∨q)	¬(p ∨q)	¬ p & ¬ q	¬(p ∨q) ↔ (¬ p & ¬ q)
0	0	0			
0	1	1			
1	0	1			
1	1	1			

e)

p	q	r	$(p \to (q \to r))$	$(p \to q)$	$(p \to r)$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$
0	0	0					
0	1	0					
1	0	0					
1	1	0					
0	0	1					
0	1	1					
1	0	1					
1	1	1					

Výklad: Vyrok je
splněn, pravdivý, lživý (sporný), nezávislý, splnitelný, ekvivalentní.
Model jazyka nad P je ohodnocení proměnných z P. Výrok v modelu M(P) pravdivý, lživý, sporný, ...
Model teorite T: ohodnocení, pro která jsou všechny výroky v T pravdivé.
Tautologie – pravdivá ve všech modelech jazyka.
Výroky jsou logicky ekvivalentní, pokud mají stejné modely.

2. V počítačové hře jste se dostali na místo se třemi bednami. Víte, že nejvýše
jeden z nápisů je pravdivý. Kde je klíč?
zlatá: Klíč není v této skříňce.
stříbrná: Klíč není v olověné skříňce.
olověná: Klíč je v této skříňce.

3. V další místnosti víte, že právě jeden z nápisů je pravdivý. Kde je klíč?
zlatá: Klíč je ve stříbrné skříňce.
stříbrná: Klíč je v olověné skříňce.
olověná: Klíč je v této skříňce.

4. U předchozí úlohy víme jen, že nejvýše jeden z nápisů je pravdivý. Kde je klíč?

5. Na rozcestí dvou cest stojí dva bratři, z nichž jeden vždy mluví pravdu a druhý
nikdy pravdu neřekne, avšak vy nevíte, který je který. Chcete se jich zeptat,
která z cest vede k cíli vašeho putování.
a) Pokud smíte položit dvě otázky, je vaše úloha jednoduchá.
b) Smíte položit jen jednu otázku.

Výklad: Příklady tvrzení v jazycích různých řádů
“Nebude-li pršet, nezmoknem. A když bude pršet, zmokneme, na sluníčku zase uschneme.” výrok
$(\neg p \to \neg z) \wedge (p \to (z \wedge u))$
“Existuje nejmenší prvek.” 1. Řádu $\exists x \, \forall y \, (x \leq y)$
Axiom indukce. 2. řádu
$\forall X \, ((X(0) \wedge \forall x(X(x) \to X(x + 1))) \to \forall x \, X(x))$
“Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.” 3. řádu
$\forall X \forall Y((\forall X(X(X) \to O(X)) \wedge \forall x(Y(x) \leftrightarrow \exists X(X(X) \wedge X(x)))) \to O(Y))$

6. Formalizujte věty:
a) Každý programátor umí C#.
b) Každý programátor umí alespoň jeden jazyk.
c) Každý programátor umí alespoň dva jazyky.

d) Každý programátor, který má rád Linux, nemá rád Windows.

DÚ: Formalizujte v jazyce s ≤ a rovností tvrzení

a) x je minimální prvek

b) x je nejmenší prvek

c) x má bezprostředního předchůdce

d) každé dva prvky mají největšího společného předchůdce.

Výklad: Univerzum je vždy neprázdné (z definice)

$(\forall x\, p(x)) \to (\exists x\, p(x))$ # pravda jen v neprázdném univerzu, proto univerzum vždy neprázdné

7. Pro dané n v jazyce s rovností formalizujte:

a) existuje nejvýše n prvků

b) existuje alespoň n prvků

c) existuje právě n prvků

d) lze vyjádřit "existuje nekonečně mnoho prvků" (proč ne, případně jak ano)

8. Hra dvou hráčů. Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po n kolech výhrou jednoho ze dvou hráčů označených X a Y, přičemž X začíná. Hra je zadána formulí $\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že ve hře s tahy $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ vyhrává X. Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující

a) "X nemůže prohrát",

b) "Y nemůže prohrát",

c) "X má vyhrávající strategii",

d) "Y má vyhrávající strategii".

9. Vyjádřete formulí 1. řádu v grafu

a) v grafu existuje cesta délky 4

b) v grafu existuje kružnice délky 4

c) u a v mají společného souseda

d) existují tři nezávislé hrany

e) existuje cesta mezi u a v délky n, n > 0 je předem dané

f) v grafu existuje vrchol stupně 1

g) graf je regulární stupně 3 (všechny uzly stupně 3)

h) existuje vrcholové pokrytí velikosti n, n > 0 je předem dané.

10. Vyjádřete formulí 2. řádu v grafu

a) existuje bipartitní rozklad

b) existuje obarvení grafu třemi barvami

c) graf má tvar vrstveného grafu s n vrstvami, kde n > 0 je předem dané

*) existuje cesta mezi u a v

11. Formalizujte s relací dělitelnosti m|n (m dělí n) v teorii množin:

a) z je společný dělitel x a y

b) z je největší společný dělitel x a y

c) z je největší společný dělitel všech čísel z množiny X

12. Formalizujte v jazyce s relacemi P(x) - "x je prvočíslo" a R(x,y)

a) pro nějaké prvočíslo x máme prvek y, že platí R(x,y)

b) pro každé prvočíslo x máme prvek y, že platí R(x,y)

13. K rozmyšlení Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.

Nainstalujte glucose nebo sat4j.org

java -jar org.sat4j.core.jar demo.txt

Příště: konjunktivní a disjunktivní normální forma, univerzální množiny spojek.

Symboly ke kopírování: ¬ ∧ ∨ → ↔ ∀ ∃ ≤ ≥ ∈