

Výroková a predikátová logika – první domácí úkol

Termín pro odevzdání domácího úkolu je 31. října 2022 ve 23:55. Řešení úkolu posílejte na e-mail Martin.Pilat@mff.cuni.cz.

Za úkol můžete získat až 5 bodů, které se počítají k požadavku na zápočet.

Definice Graf G je k -obarvitelný, pokud lze jeho vrcholy obarvit maximálně k barvami tak, že každá z dvojice vrcholů spojených nějakou hranou má jinou barvu. Nejmenší číslo k takové, že graf je k -obarvitelný je *chromatické číslo* grafu G .

Dimacs formát pro grafy Popis grafu v Dimacs formátu je velmi jednoduchý – jde o textový soubor, kde každá řádka začíná jedním znakem, který kóduje, co tato řádka obsahuje. Řádky začínající znakem `c` jsou komentáře. První nekomentovaná řádka má formát `p edge <vrcholy> <hrany>`, kde `<vrcholy>` a `<hrany>` jsou čísla, která obsahují počet vrcholů respektive hran v grafu. Řádky ve formátu `e <v1> <v2>`, kde `<v1>` a `<v2>` jsou čísla mezi 1 a `<vrcholy>` definují hranu mezi `<v1>` a `<v2>`. Příklad takového souboru najdete v přiloženém zip souboru.

Dimacs formát pro formule v CNF Podobně jako Dimacs formát pro grafy, je i Dimacs formát pro formule jednoduchý. Opět jde o textový soubor, kde první znak každé řádky určuje, co tato řádka obsahuje, a opět řádky začínající `c` jsou komentáře. První nekomentovaná řádka obsahuje `p cnf <proměnné> <klauzule>` a říká, že soubor obsahuje formuli v CNF, která má `<proměnné>` proměnných a `<klauzule>` klauzulí. Proměnné jsou reprezentované jako čísla mezi 1 a `<proměnné>` a pro negované proměnné se používají záporná čísla (např. `-5` je negace proměnné 5). Po řádce `p cnf ...`, soubor obsahuje `<klauzule>` řádek, každou s jednou klauzulí zadanou jako seznam proměnných (nebo negací) oddělených mezerou a ukončených 0. Opět se můžete podívat na příklad v přiloženém zip souboru.

Úkol

1. Napište program/skript (v libovolném programovacím jazyce), který na vstupu (např. jako parametr z konzole) dostane popis grafu G v Dimacs formátu a číslo k a vypíše formuli v CNF (opět v Dimacs formátu), která je splnitelná právě tehdy, když graf G je k -obarvitelný. Použijte tento vytvořený skript a nějaký řešič SATu (např. Glucose <http://www.labri.fr/perso/lsimon/glucose/>) k zodpovězení následujících otázek.
2. V přiloženém zipu najdete 5 grafů v Dimacs formátu (`1.graph` – `5.graph`).
 - (a) Je graf uložený v souboru `3.graph` 3-obarvitelný? Je 5-obarvitelný? Je 10-obarvitelný?
 - (b) Pro grafy uložené v souborech `4.graph` a `5.graph` najděte co nejtěsnější dolní a horní odhad jejich chromatického čísla. (Stačí pouze odhad – uvidíte, že pro některé hodnoty k poběží řešič docela dlouho; klidně běh po cca minutě ukončete.)

Nápověda: První dva grafy mají chromatické číslo 5, můžete je použít pro odladění skriptu.

Další podmínky Skript/program napište v libovolném rozumném programovacím jazyce (Python, Java, C, C++, C#, Haskell, ...). Pokud byste chtěli použít nějaký exotičtější jazyk, dejte vědět. Pravděpodobně to bude možné, pokud budu schopen zdrojový kód alespoň číst a program zkompileovat/spustit. Program budu testovat i na několika dalších vstupech.

S řešením mi pošlete zdrojový kód vašeho programu pro převod obarvitelnosti na SAT a příklad, jak ho spustit. Přidejte také krátké vysvětlení, co program dělá a proč. Nezapomeňte na odpovědi na otázky 2b) a 2c).

Při řešení můžete použít skript ze cvičení, který testuje bipartitnost grafu. Je v něm implementované načítání grafů a vypisování formulí, potřebujete změnit jen to, jak se generuje CNF.