

Výroková a predikátová logika – třetí úkol

Deadline pro odevzdání úkolu je 22. prosince 2022 před cvičením. Úkoly odevzdávejte mailem na Martin.Pilat@mff.cuni.cz (stačí sken/fotka vašeho řešení na papíře). Úkol můžete také odevzdat osobně na cvičení 22. prosince 2022.

Za úkol můžete získat maximálně pět bodů.

1. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ je struktura v jazyce $L = \langle +, \cdot, 0 \rangle$ s rovností, kde \mathbb{Q} je množina racionálních čísel, “+” je sčítání racionálních čísel, “ \cdot ” je násobení racionálních čísel a “0” je konstanta reprezentovaná číslem 0.
 - (a) Najděte podstrukturu \mathcal{A} generovanou množinou $\{1\}$, tedy $\mathcal{A}\langle 1 \rangle$. (1 bod)
 - (b) Jsou všechny podstruktury \mathcal{A} navzájem elementárně ekvivalentní? (1 bod)
2. Nechť $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2), \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
 - (a) Je teorie T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle \rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. (1 bod)
 - (b) Jsou teorie T a T' kompletní?. Uveďte zdůvodnění. (1 bod)
3. Označme $L(x, y)$ predikát ”*existuje let z x do y*” a $S(x, y)$ predikát ”*existuje spojení z x do y*”. Víme, že
 - (a) Z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku se dá letět do Paříže.
 - (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$
 - (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$
 - (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$

Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže (1 bod)