

# Úvod do umělé inteligence (NAIL120)

## 5. cvičení

Jirka Fink

<https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/>

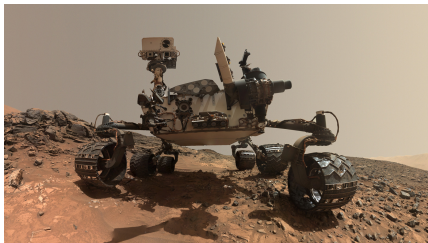
Katedra teoretické informatiky a matematické logiky  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Univerzita Karlova v Praze

**Letní semestr 2025/26**

Poslední změna 24. března 2026

Licence: Creative Commons BY-NC-SA 4.0

# Proč bychom měli v umělé inteligenci používat pravděpodobnost?



## Proč bychom měli v umělé inteligenci používat pravděpodobnost?

- Nemusíme znát úplný matematický popis prostředí (model).
- Nemusíme mít k dispozici všechna data popisující počáteční stav.
- Kompletní model může být příliš komplikovaný pro praktické použití.
- Pravděpodobnostní model může být jednodušší, pokud umíme pravděpodobnost používat.

## Proč bychom měli v umělé inteligenci používat pravděpodobnost?

- Nemusíme znát úplný matematický popis prostředí (model).
- Nemusíme mít k dispozici všechna data popisující počáteční stav.
- Kompletní model může být příliš komplikovaný pro praktické použití.
- Pravděpodobnostní model může být jednodušší, pokud umíme pravděpodobnost používat.

## Jak určit pravděpodobnostní rozložení studovaných jevů?

## Proč bychom měli v umělé inteligenci používat pravděpodobnost?

- Nemusíme znát úplný matematický popis prostředí (model).
- Nemusíme mít k dispozici všechna data popisující počáteční stav.
- Kompletní model může být příliš komplikovaný pro praktické použití.
- Pravděpodobnostní model může být jednodušší, pokud umíme pravděpodobnost používat.

## Jak určit pravděpodobnostní rozložení studovaných jevů?

- Statistika
- Zkušenosti, intuice a odhad

## Pravděpodobnostní prostor a jev

- Jev (event) popisuje jeden možný stav světa.
- Pravděpodobnostní prostor (sample space) je množina všech jevů.

## Pravděpodobnostní prostor a jev

- Jev (event) popisuje jeden možný stav světa.
- Pravděpodobnostní prostor (sample space) je množina všech jevů.

## Pravděpodobnostní rozložení (Probabilistic distribution/model)

Pravděpodobnostní rozložení udává pravděpodobnost  $P(\omega)$  každého jevu  $\omega$  z prostoru  $\Omega$ , které musí splňovat

- $P(\omega) \geq 0$  pro všechna  $\omega \in \Omega$
- $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Hodnoty pravděpodobnostního rozdělení se zapisují do vektoru s předdefinovaným pořadím, např.  $\mathbf{P}(\text{Mince}) = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ .

## Pravděpodobnostní prostor a jev

- Jev (event) popisuje jeden možný stav světa.
- Pravděpodobnostní prostor (sample space) je množina všech jevů.

## Pravděpodobnostní rozložení (Probabilistic distribution/model)

Pravděpodobnostní rozložení udává pravděpodobnost  $P(\omega)$  každého jevu  $\omega$  z prostoru  $\Omega$ , které musí splňovat

- $P(\omega) \geq 0$  pro všechna  $\omega \in \Omega$
- $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Hodnoty pravděpodobnostního rozdělení se zapisují do vektoru s předdefinovaným pořadím, např.  $\mathbf{P}(\text{Mince}) = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ .

## Náhodná proměnná

- Náhodná proměnná symbolicky označuje náhodný výsledek z pravděpodobnostního modelu.
- Doména náhodné proměnné je množina všech možných hodnot, kterých může nabývat.

## Pravděpodobnostní prostor a model

Podmíněnou pravděpodobností  $P(a|b)$  je pravděpodobnost výskytu jevu  $a$  za předpokladu, že se vyskytl jev  $b$ , kde  $P(b) > 0$ .

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

## Pravděpodobnostní prostor a model

Podmíněnou pravděpodobností  $P(a|b)$  je pravděpodobnost výskytu jevu  $a$  za předpokladu, že se vyskytl jev  $b$ , kde  $P(b) > 0$ .

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

## Značení

$P(a|b, c) = P(a|b \wedge c)$  je pravděpodobnost výskytu jevu  $a$  za předpokladu, že se vyskytly jevy  $b$  i  $c$  současně.

## Pravděpodobnostní prostor a model

Podmíněnou pravděpodobností  $P(a|b)$  je pravděpodobnost výskytu jevu  $a$  za předpokladu, že se vyskytl jev  $b$ , kde  $P(b) > 0$ .

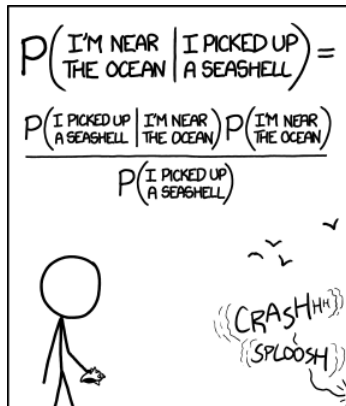
$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

## Značení

$P(a|b, c) = P(a|b \wedge c)$  je pravděpodobnost výskytu jevu  $a$  za předpokladu, že se vyskytly jevy  $b$  i  $c$  současně.

## Vlastnosti

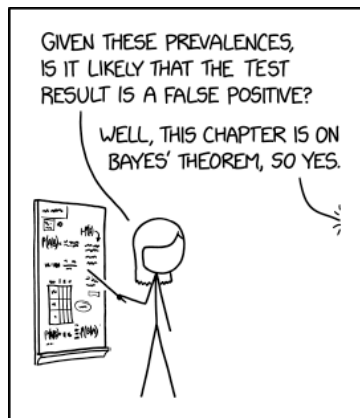
- Product rule:  $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$
- Bayes' rule:  $P(b|a) = P(a|b) \frac{P(b)}{P(a)}$
- Chain rule:  
 $P(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = \prod_{i=1}^n P(a_i|a_1, \dots, a_{i-1})$



STATISTICALLY SPEAKING, IF YOU PICK UP A SEASHELL AND DON'T HOLD IT TO YOUR EAR, YOU CAN PROBABLY HEAR THE OCEAN.

Source: <https://xkcd.com/1236/>

- V žadatelích je 6% podvodníků.
- Model pro schválení odmítá podvodníka s pravděpodobností 90 %
- a odmítne omylem legitimního žadatele v 8 % případů.
- Vypočítejte pravděpodobnost, že zamítnutý žadatel je podvodník.



SOMETIMES, IF YOU UNDERSTAND  
BAYES' THEOREM WELL ENOUGH,  
YOU DON'T NEED IT.

Source: <https://xkcd.com/2545/>

## Nezávislost

Následující definice nezávislosti jevů  $a$  a  $b$  jsou ekvivalentní.

- $P(a \wedge b) = P(a)P(b)$
- $P(a) = P(a|b)$
- $P(b) = P(b|a)$

## Nezávislost

Následující definice nezávislosti jevů  $a$  a  $b$  jsou ekvivalentní.

- $P(a \wedge b) = P(a)P(b)$
- $P(a) = P(a|b)$
- $P(b) = P(b|a)$

## Podmíněná nezávislost

Jevy  $a$  a  $b$  jsou nezávislé za podmínky  $c$ , jestliže  $P(a \wedge b|c) = P(a|c)P(b|c)$ .

## Nezávislost

Následující definice nezávislosti jevů  $a$  a  $b$  jsou ekvivalentní.

- $P(a \wedge b) = P(a)P(b)$
- $P(a) = P(a|b)$
- $P(b) = P(b|a)$

## Podmíněná nezávislost

Jevy  $a$  a  $b$  jsou nezávislé za podmínky  $c$ , jestliže  $P(a \wedge b|c) = P(a|c)P(b|c)$ .

## Cvičení

- Jestliže jsou jevy  $a$  a  $b$  jsou nezávislé, jsou též jevy  $a$  a  $b$  nezávislé za podmínky  $c$ ?
- Jestliže jsou jevy  $a$  a  $b$  jsou nezávislé za podmínky, jsou též jevy  $a$  a  $b$  nezávislé (bez podmínky  $c$ )?

## Princip inkluze-exkluze

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$$

## Princip inkluze-exkluze

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$$

## Marginalizace (součet pravděpodobností všech příslušných jevů)

$$P(y) = \sum_{z \in \Omega} P(y \wedge z), \text{ kde } \Omega \text{ je doména proměnné } z$$

## Princip inkluze-exkluze

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$$

## Marginalizace (součet pravděpodobností všech příslušných jevů)

$$P(y) = \sum_{z \in \Omega} P(y \wedge z), \text{ kde } \Omega \text{ je doména proměnné } z$$

## Podmíněná marginalizace (conditioning)

$$P(y) = \sum_{z \in \Omega} P(y|z)P(z)$$

## Princip inkluze-exkluze

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$$

## Marginalizace (součet pravděpodobností všech příslušných jevů)

$$P(y) = \sum_{z \in \Omega} P(y \wedge z), \text{ kde } \Omega \text{ je doména proměnné } z$$

## Podmíněná marginalizace (conditioning)

$$P(y) = \sum_{z \in \Omega} P(y|z)P(z)$$

## Výpočet podmíněné pravděpodobnosti pomocí marginalizace

$$P(x|y) = \frac{\sum_{z \in \Omega} P(x \wedge y \wedge z)}{\sum_{z \in \Omega} P(y \wedge z)}$$

## Popis

- Jeskynní systém s místnostmi rozmístěnými ve 2D mřížce
- V každé místnosti je jáma s pravděpodobností  $p$
- V místnosti sousedících s jámou je vítr ( $V$ )
- Některé místnosti jsou již prozkoumané ( $OK, V$ )
- Jaká je pravděpodobnost jámy ve všech místnostech za daných informací?

## Popis

- Jeskynní systém s místnostmi rozmístěnými ve 2D mřížce
- V každé místnosti je jáma s pravděpodobností  $p$
- V místnosti sousedících s jámou je vítr (V)
- Některé místnosti jsou již prozkoumané (OK,V)
- Jaká je pravděpodobnost jámy ve všech místnostech za daných informací?

<b>A</b>	1	2
1	V	
2		

## Popis

- Jeskynní systém s místnostmi rozmístěnými ve 2D mřížce
- V každé místnosti je jáma s pravděpodobností  $p$
- V místnosti sousedících s jámou je vítr (V)
- Některé místnosti jsou již prozkoumané (OK,V)
- Jaká je pravděpodobnost jámy ve všech místnostech za daných informací?

<b>A</b>	1	2
1	V	
2		

<b>B</b>	1	2	3	4	5
1		V		V	

## Popis

- Jeskynní systém s místnostmi rozmístěnými ve 2D mřížce
- V každé místnosti je jáma s pravděpodobností  $p$
- V místnosti sousedících s jámou je vítr (V)
- Některé místnosti jsou již prozkoumané (OK,V)
- Jaká je pravděpodobnost jámy ve všech místnostech za daných informací?

A	1	2
1	V	
2		

B	1	2	3	4	5
1		V		V	

C	1	2	3
1		V	
2		V	

## Otázky

- Jsou v příkladu B krajní pozice nezávislé?
- Které pozice jsou v příkladu C nezávislé?

Jak obecně poznat, které podmnožiny pozic jsou vzájemně nezávislé?

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	V	V				V			V	
2						V	V			
3						V			V	
4	V		V		V	V			V	
5			V							V
6	V					V			V	

Jak obecně poznat, které podmnožiny pozic jsou vzájemně nezávislé?

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	V	V				V			V	
2						V	V			
3						V			V	
4	V		V		V	V			V	
5			V							V
6	V					V			V	

Daný počet jam

Jak se změní výpočet pravděpodobností jam, jestliže jámy nejsou generovány s pravděpodobností  $p$ , ale celkem  $k$  jam je rozmístěno rovnoměrně?

ID E-mailu	Obsahuje "Zdarma"	Obsahuje "Vyhrajte"	Štítek
1	Ano	Ano	Je spam
2	Ano	Ne	Je spam
3	Ne	Ano	Je spam
4	Ne	Ne	Není spam
5	Ano	Ano	Je spam
6	Ano	Ne	Není spam
7	Ne	Ano	Není spam
8	Ne	Ne	Není spam

- 1 Vypočítejte pravděpodobnost, že e-mail je spam.

ID E-mailu	Obsahuje "Zdarma"	Obsahuje "Vyhrajte"	Štítek
1	Ano	Ano	Je spam
2	Ano	Ne	Je spam
3	Ne	Ano	Je spam
4	Ne	Ne	Není spam
5	Ano	Ano	Je spam
6	Ano	Ne	Není spam
7	Ne	Ano	Není spam
8	Ne	Ne	Není spam

- 1 Vypočítejte pravděpodobnost, že e-mail je spam.
- 2 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slovo "Zdarma".
- 3 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slovo "Vyhrajte".

ID E-mailu	Obsahuje “Zdarma”	Obsahuje “Vyhrajte”	Štítek
1	Ano	Ano	Je spam
2	Ano	Ne	Je spam
3	Ne	Ano	Je spam
4	Ne	Ne	Není spam
5	Ano	Ano	Je spam
6	Ano	Ne	Není spam
7	Ne	Ano	Není spam
8	Ne	Ne	Není spam

- 1 Vypočítejte pravděpodobnost, že e-mail je spam.
- 2 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slovo “Zdarma”.
- 3 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slovo “Vyhrajte”.
- 4 Jsou předchozí dvě podmíněné pravděpodobnosti nezávislé?
- 5 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slova “Zdarma” i “Vyhrajte”.

ID E-mailu	Obsahuje “Zdarma”	Obsahuje “Vyhrajte”	Štítek
1	Ano	Ano	Je spam
2	Ano	Ne	Je spam
3	Ne	Ano	Je spam
4	Ne	Ne	Není spam
5	Ano	Ano	Je spam
6	Ano	Ne	Není spam
7	Ne	Ano	Není spam
8	Ne	Ne	Není spam

- 1 Vypočítejte pravděpodobnost, že e-mail je spam.
- 2 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slovo “Zdarma”.
- 3 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slovo “Vyhrajte”.
- 4 Jsou předchozí dvě podmíněné pravděpodobnosti nezávislé?
- 5 Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost, že e-mail je spam, pokud obsahuje slova “Zdarma” i “Vyhrajte”.
- 6 Jak spočítat pravděpodobnost, že e-mail je spam, můžeme-li sledovat statistiku výskytu nejčastějších 1000 slov v e-mailech chodících na celou universitu?

## Definice proměnných

- Onemocnění (Boolean)
- Symptom 1: Kašel (Boolean)
- Symptom 2: Horečka (Boolean)
- Symptom 3: Únava (Boolean)
- Rizikový faktor 1: Kouření (Boolean)
- Rizikový faktor 2: Rodinná anamnéza (Boolean)

## Definice proměnných

- Onemocnění (Boolean)
- Symptom 1: Kašel (Boolean)
- Symptom 2: Horečka (Boolean)
- Symptom 3: Únava (Boolean)
- Rizikový faktor 1: Kouření (Boolean)
- Rizikový faktor 2: Rodinná anamnéza (Boolean)

## Cvičení

- Vytvořte Bayesovskou síť.
- Jaké statistické informace potřebujeme, abychom mohli počítat pravděpodobnost onemocnění na základě symptomů a rizikových faktorů?
- Máme-li potřebné informace, jak bude tuto pravděpodobnost počítat?

- 1 Společnost A má tržní podíl 40 % a 5 % zboží dodává pozdě.
- 2 Společnost B má tržní podíl 30 % a 3 % zboží dodává pozdě.
- 3 Společnost C má tržní podíl 30 % a 2,5 % zboží dodává pozdě.

Dojde-li zásilka pozdě, jaká je pravděpodobnost, že ji odeslala společnost A?

- 1 Rodina má dvě děti. **Mladší** je kluk. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je též kluk?
- 2 Rodina má dvě děti. **Jedno z nich** je kluk. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě je též kluk?

V pytlíku máme  $n - 1$  normálních mincí a jednu falešnou mající hlavu na obou stranách.

- 1 Vybereme náhodně jednu minci, hodíme ji a padne hlava. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že mince je falešná?

V pytlíku máme  $n - 1$  normálních mincí a jednu falešnou mající hlavu na obou stranách.

- 1 Vybereme náhodně jednu minci, hodíme ji a padne hlava. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že mince je falešná?
- 2 Náhodně vybranou minci  $k$ -krát hodíme a padne nám  $k$  hlav. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že mince je falešná?

V pytlíku máme  $n - 1$  normálních mincí a jednu falešnou mající hlavu na obou stranách.

- 1 Vybereme náhodně jednu minci, hodíme ji a padne hlava. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že mince je falešná?
- 2 Náhodně vybranou minci  $k$ -krát hodíme a padne nám  $k$  hlav. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že mince je falešná?
- 3 Chceme zjistit, zda vybraná mince je falešná pomocí  $k$  hodů. Výstupem testu je *falešná*, pokud  $k$ -krát padne hlava. Jaká je (nepodmíněná) pravděpodobnost chybného výsledku testu?

## 5. domácí úkol: Pravděpodobnost



### Mine captcha



Source: <https://xkcd.com/538/>

### Zadání (zkráceno)

- Napište hráče pro hru hledání min (minesweeper)
- K dispozici máte
  - Velikost tabulky
  - Pravděpodobnost miny na každé pozici
  - Počet min sousedních pozic pro prozkoumaná políčka
- Napište funkci, která vrátí další pozici k prozkoumání
- Cílem je zlepšit úspěšnost triviálního hráče v zadané šabloně