Úvod do umělé inteligence (NAIL120)

6. cvičení

Jirka Fink

https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Letní semestr 2025/26

Poslední změna 31. března 2026

Odhad pozice robota bez dalších informací

- X_t: Náhodná proměnná udávající stav (pozici robota) v čase t
- Známe počáteční distribuci $P(X_1)$
- Známe přechodovou funkci $P(X_t|X_{t-1})$
- $X_{i:j}$ značí posloupnost $X_i, X_{i+1}, \dots, X_j$
- Přechodová funkce je stacionární $P(X_t|X_{0:t-1}) = P(X_t|X_{t-1})$
- Jak spočítáme $P(X_t)$?

Určení mince

Popis příkladu

- Máme tři mince, na kterých padá hlava s pravděpodobností 20%, 75% a 80%
- Na začátku vybereme náhodnou minci (uniformě)
- Minci třikrát hodíme a dvakrát padne hlava
- Určete pravděpodobnosti, že jsme vybrali jednotlivé mince

Určení mince

Popis příkladu

- Máme tři mince, na kterých padá hlava s pravděpodobností 20%, 75% a 80%
- Na začátku vybereme náhodnou minci (uniformě)
- Minci třikrát hodíme a dvakrát padne hlava
- Určete pravděpodobnosti, že jsme vybrali jednotlivé mince

Obecně

- Známe počáteční distribuci proměnné X
- Postupně dostáváme informace $e_1, e_2, \dots$
- Známe $P(E_t|X)$
- Markovský předpoklad: $P(E_t|X, E_{1:t-1}) = P(E_t|X)$
- Jak spočítáme $P(X|e_{1:t})$?

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných nepřesných informací.

Pravděpodobnostní odvozování (Probabilistic reasoning/inference)

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných nepřesných informací.

Značení

- $e_{1:t}$: Získané informace v časech 1 až t
- X_t: Náhodná proměnná udávající stav v čase t

Pravděpodobnostní odvozování (Probabilistic reasoning/inference)

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných nepřesných informací.

Značení

- $e_{1:t}$: Získané informace v časech 1 až t
- X_t: Náhodná proměnná udávající stav v čase t

Základní druhy odvozování v čase

- Filtering $P(X_t|e_{1:t})$: Jaký je aktuální stav?

Pravděpodobnostní odvozování (Probabilistic reasoning/inference)

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných nepřesných informací.

Značení

- $e_{1:t}$: Získané informace v časech 1 až t
- X_t: Náhodná proměnná udávající stav v čase t

Základní druhy odvozování v čase

- Filtering $P(X_t|e_{1:t})$: Jaký je aktuální stav?
- Prediction $P(X_{t+k}|e_{1:t})$: Jaký bude stav v budoucnosti?

Pravděpodobnostní odvozování (Probabilistic reasoning/inference)

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných nepřesných informací.

Značení

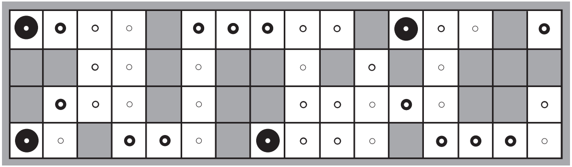
- $e_{1:t}$: Získané informace v časech 1 až t
- X_t: Náhodná proměnná udávající stav v čase t

Základní druhy odvozování v čase

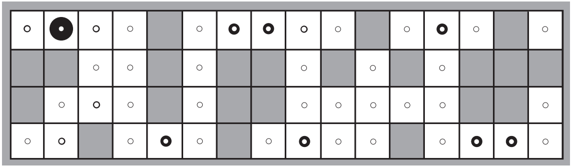
- Filtering $P(X_t|e_{1:t})$: Jaký je aktuální stav?
- Prediction $P(X_{t+k}|e_{1:t})$: Jaký bude stav v budoucnosti?
- Smoothing $P(X_{t-k}|e_{1:t})$: Jaký byl stav v minulosti?

Chybující robot v bludišti

- Robot se pohybuje ve 2D mřížce
- Na některých pozicích je zeď a robot zná jejich pozice
- Robot na začátku neví, kde se nachází, ale ví, kde je sever
- Čidla robota hlásí, s jakou pravděpodobností je u zdi



(a) Posterior distribution over robot location after $E_1 = NSW$



(b) Posterior distribution over robot location after $E_1 = NSW, E_2 = NS$

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)
- $P(X_t|X_{t-1})$ pravděpodobnostní pohyb robota (známe)

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)
- $P(X_t|X_{t-1})$ pravděpodobnostní pohyb robota (známe)
- $P(e_t|X_t)$ hodnoty ze senzorů o sousedních políčkách (známe)

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)
- $P(X_t|X_{t-1})$ pravděpodobnostní pohyb robota (známe)
- $P(e_t|X_t)$ hodnoty ze senzorů o sousedních políčkách (známe)
- $P(X_k|e_{1:t})$ umístění robota v čase k s informacemi do času t (chceme spočítat)

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)
- $P(X_t|X_{t-1})$ pravděpodobnostní pohyb robota (známe)
- $P(e_t|X_t)$ hodnoty ze senzorů o sousedních políčkách (známe)
- $P(X_k|e_{1:t})$ umístění robota v čase k s informacemi do času t (chceme spočítat)

Přechodová funkce je stacionární

$P(X_t|X_{0:t-1}) = P(X_t|X_{t-1})$
Přechodová funkce je nezávislá na předchozích stavech a je stejná ve všech časech t

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)
- $P(X_t|X_{t-1})$ pravděpodobnostní pohyb robota (známe)
- $P(e_t|X_t)$ hodnoty ze senzorů o sousedních políčkách (známe)
- $P(X_k|e_{1:t})$ umístění robota v čase k s informacemi do času t (chceme spočítat)

Přechodová funkce je stacionární

$P(X_t|X_{0:t-1}) = P(X_t|X_{t-1})$
Přechodová funkce je nezávislá na předchozích stavech a je stejná ve všech časech t

Markovský předpoklad pro informace z čidel

$P(E_t|X_{0:t}, E_{1:t-1}) = P(E_t|X_t)$
Informace z čidel jsou nezávislé na předchozích stavech $X_{0:t-1}$ a předchozích informacích $E_{1:t-1}$

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$

Filtering

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$

Filtering

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u) = P(X_{t+1} = v|X_t = u)$

Filtering

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u) = P(X_{t+1} = v|X_t = u)$

Zpřesnění X_{t+1} na základě nových hodnot z čidel e_{t+1}

- Známe $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t+1})$

Filtering

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u) = P(X_{t+1} = v|X_t = u)$

Zpřesnění X_{t+1} na základě nových hodnot z čidel e_{t+1}

- Známe $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t+1})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t+1}|e_{1:t}, e_{t+1}) = P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1})\frac{P(X_{t+1}|e_{1:t})}{P(e_{t+1}|e_{1:t})}$

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u) = P(X_{t+1} = v|X_t = u)$

Zpřesnění X_{t+1} na základě nových hodnot z čidel e_{t+1}

- Známe $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t+1})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t+1}|e_{1:t}, e_{t+1}) = P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1})\frac{P(X_{t+1}|e_{1:t})}{P(e_{t+1}|e_{1:t})}$
- Hodnoty senzorů nezávisí na předchozích hodnotách
  $P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1}) = P(e_{t+1}|X_{t+1})$

Filtering

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u) = P(X_{t+1} = v|X_t = u)$

Zpřesnění X_{t+1} na základě nových hodnot z čidel e_{t+1}

- Známe $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t+1})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t+1}|e_{1:t}, e_{t+1}) = P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1})\frac{P(X_{t+1}|e_{1:t})}{P(e_{t+1}|e_{1:t})}$
- Hodnoty senzorů nezávisí na předchozích hodnotách
  $P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1}) = P(e_{t+1}|X_{t+1})$
- $P(e_{t+1}|e_{1:t})$ je normalizace
- Platí $P(e_{t+1}|e_{1:t}) = P(e_{t+1})$? Jsou náhodné proměnné E_{t+1} a $E_{1:t}$ nezávislé?

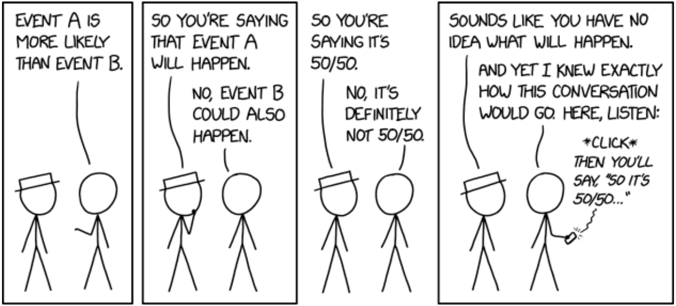
Prediction

Podobně jako filtering, jen nedostáváme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_k|e_{1:t})$ pro $k \geq t$
- Chceme spočítat $P(X_{k+1}|e_{1:t})$

Podobně jako filtering, jen nedostáváme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_k|e_{1:t})$ pro $k \geq t$
- Chceme spočítat $P(X_{k+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{k+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{k+1} = v|e_{1:t}, X_k = u)P(X_k = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{k+1} = v|e_{1:t}, X_k = u) = P(X_{k+1} = v|X_k = u)$



Source: `https://xkcd.com/2370/`

Smoothing

- Známe-li informace z budoucnosti, můžeme zpřesnit pozice robota v minulosti? Liší se $P(X_t|e_{1:t+1})$ a $P(X_t|e_{1:t})$?

Smoothing

- Známe-li informace z budoucnosti, můžeme zpřesnit pozice robota v minulosti? Liší se $P(X_t|e_{1:t+1})$ a $P(X_t|e_{1:t})$?
- Známe-li informace z budoucnosti, potřebujeme informace z dávné minulosti? Liší se $P(X_2|e_{1:3})$ a $P(X_2|e_{2:3})$?

Smoothing: Poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}|e_{1:t})$

Smoothing: Poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_{t-1}|e_{1:t}) = \sum_v P(X_{t-1}, X_t = v|e_{1:t})$

Smoothing: Poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_{t-1}|e_{1:t}) = \sum_v P(X_{t-1}, X_t = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1}, e_t) = P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1})\frac{P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1})}{P(e_t|e_{1:t-1})}$

Smoothing: Poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_{t-1}|e_{1:t}) = \sum_v P(X_{t-1}, X_t = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1}, e_t) = P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) \frac{P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1})}{P(e_t|e_{1:t-1})}$
- Informace z čidel závisí jen na aktuální pozici
  $P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) = P(e_t|X_t)$

Smoothing: Poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_{t-1}|e_{1:t}) = \sum_v P(X_{t-1}, X_t = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1}, e_t) = P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1})\frac{P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1})}{P(e_t|e_{1:t-1})}$
- Informace z čidel závisí jen na aktuální pozici
  $P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) = P(e_t|X_t)$
- Product rule
  $P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1}) = P(X_t|X_{t-1}, e_{1:t-1})P(X_{t-1}|e_{1:t-1}) = P(X_t|X_{t-1})P(X_{t-1}|e_{1:t-1})$

Smoothing: Poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_{t-1}|e_{1:t}) = \sum_v P(X_{t-1}, X_t = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1}, e_t) = P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) \frac{P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1})}{P(e_t|e_{1:t-1})}$
- Informace z čidel závisí jen na aktuální pozici
  $P(e_t|X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) = P(e_t|X_t)$
- Product rule
  $P(X_{t-1}, X_t|e_{1:t-1}) = P(X_t|X_{t-1}, e_{1:t-1})P(X_{t-1}|e_{1:t-1}) = P(X_t|X_{t-1})P(X_{t-1}|e_{1:t-1})$
- Musíme si pamatovat $P(X_{t-1}|e_{1:t-1})$

Smoothing: Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k|e_{1:t})$

Smoothing: Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_k|e_{1:t}) = \sum_v P(X_k, X_{k+1} = v|e_{1:t})$

Smoothing: Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_k|e_{1:t}) = \sum_v P(X_k, X_{k+1} = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}, e_{k+1:t}) = P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k}) \frac{P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k})}{P(e_{k+1:t}|e_{1:k})}$

Smoothing: Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_k|e_{1:t}) = \sum_v P(X_k, X_{k+1} = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}, e_{k+1:t}) = P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k})\frac{P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k})}{P(e_{k+1:t}|e_{1:k})}$
- Product rule
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k, e_{1:k})P(X_k|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k)P(X_k|e_{1:k})$
  Musíme si pamatovat $P(X_k|e_{1:k})$

Smoothing: Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_k|e_{1:t}) = \sum_v P(X_k, X_{k+1} = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}, e_{k+1:t}) = P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k}) \frac{P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k})}{P(e_{k+1:t}|e_{1:k})}$
- Product rule
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k, e_{1:k})P(X_k|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k)P(X_k|e_{1:k})$
  Musíme si pamatovat $P(X_k|e_{1:k})$
- $P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k}) = P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1}) = P(e_{k+1}|X_{k+1})P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$
  Hodnoty z čidel nemají žádný vliv na pohyb robota, tedy X_{k+1} závisí jen na X_k
  Hodnoty z čidel závisí jen na aktuální pozici, tedy e_k závisí jen na X_k
  Podmíněné náhodné proměnné $e_{k+1}|X_{k+1}$ a $e_{k+2}|X_{k+1}$ jsou nezávislé

Smoothing: Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k|e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_k|e_{1:t}) = \sum_v P(X_k, X_{k+1} = v|e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}, e_{k+1:t}) = P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k}) \frac{P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k})}{P(e_{k+1:t}|e_{1:k})}$
- Product rule
  $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k, e_{1:k})P(X_k|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k)P(X_k|e_{1:k})$
  Musíme si pamatovat $P(X_k|e_{1:k})$
- $P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k}) = P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1}) = P(e_{k+1}|X_{k+1})P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$
  Hodnoty z čidel nemají žádný vliv na pohyb robota, tedy X_{k+1} závisí jen na X_k
  Hodnoty z čidel závisí jen na aktuální pozici, tedy e_k závisí jen na X_k
  Podmíněné náhodné proměnné $e_{k+1}|X_{k+1}$ a $e_{k+2}|X_{k+1}$ jsou nezávislé
- Průběžně musíme počítat $P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$

Smoothing: Výpočet $P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$

- Začneme od $P(e_t|X_{t-1})$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_t|X_{t-1}) = \sum_u P(e_t|X_t = u, X_{t-1})P(X_t = u|X_{t-1})$

Smoothing: Výpočet $P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$

- Začneme od $P(e_t|X_{t-1})$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_t|X_{t-1}) = \sum_u P(e_t|X_t = u, X_{t-1})P(X_t = u|X_{t-1})$
- Pokračujeme výpočtem $P(e_{k+1:t}|X_k)$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_{k+1:t}|X_k) = \sum_u P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k)P(X_{k+1} = u|X_k)$

- Začneme od $P(e_t|X_{t-1})$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_t|X_{t-1}) = \sum_u P(e_t|X_t = u, X_{t-1})P(X_t = u|X_{t-1})$
- Pokračujeme výpočtem $P(e_{k+1:t}|X_k)$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_{k+1:t}|X_k) = \sum_u P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k)P(X_{k+1} = u|X_k)$
- Upravíme: $P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k) = P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1} = u)$

Smoothing: Výpočet $P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$

- Začneme od $P(e_t|X_{t-1})$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_t|X_{t-1}) = \sum_u P(e_t|X_t = u, X_{t-1})P(X_t = u|X_{t-1})$
- Pokračujeme výpočtem $P(e_{k+1:t}|X_k)$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_{k+1:t}|X_k) = \sum_u P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k)P(X_{k+1} = u|X_k)$
- Upravíme: $P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k) = P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1} = u)$
- Chain rule
  $P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1} = u) = P(e_{k+1}|e_{k+2:t}, X_{k+1} = u)P(e_{k+2:t}|X_{k+1} = u)$

Smoothing: Výpočet $P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$

- Začneme od $P(e_t|X_{t-1})$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_t|X_{t-1}) = \sum_u P(e_t|X_t = u, X_{t-1})P(X_t = u|X_{t-1})$
- Pokračujeme výpočtem $P(e_{k+1:t}|X_k)$ pomocí podmíněné marginalizace
  $P(e_{k+1:t}|X_k) = \sum_u P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k)P(X_{k+1} = u|X_k)$
- Upravíme: $P(e_{k+1:t}|X_{k+1} = u, X_k) = P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1} = u)$
- Chain rule
  $P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1} = u) = P(e_{k+1}|e_{k+2:t}, X_{k+1} = u)P(e_{k+2:t}|X_{k+1} = u)$
- Tedy $P(e_{k+1:t}|X_k)$ počítáme indukcí pomocí $P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$

Předpoklad Markovského procesu

Můžeme použít stejný postup, jestliže senzory robota při návratu na stejné místo dávají vždy stejnou hodnotu?

Varianty

Předpoklad Markovského procesu

Můžeme použít stejný postup, jestliže senzory robota při návratu na stejné místo dávají vždy stejnou hodnotu?

Predikce dalšího hodu mincí

S jakou pravděpodobností padne hlava při čtvrtém hodu?

6. domácí úkol: Lokalizace v čase

Zadání (zkráceno)

- Na Marsu přistane robot, který se má dostat na základnu
- Přistání není 100 % úspěšné, takže
  - nepřistál přímo na základně, ale musí k ní dojet
  - poškodily se mu navigační systémy a většina senzorů
- Naštěstí fungují motory, takže je schopen se přesně pohybovat ve 4 základních směrech a vždy ví, jaká je jeho relativní pozice vůči místu přistání
- Funguje mu binární čidlo, které náhodně vrací True/False na základě tmavosti/světlosti dané pozice
- Má uloženou mapu, ze které pro každou pozici dokáže určit stupeň šedi
- Cílem robota je dostat se na základnu
  - nesmí vyjet mimo mapu
  - má omezenou kapacity baterie (počet kroků)

Napište program, který v každém kroku dostane binární hodnotu z čidla, a určí směr, ve kterém se má robot posunout.

(Jak) Zpřesňují hodnoty z čidel přesnost umístění robota?

Opakované čtení z čidel na jednom místě

- Uvažujme, že robot z domácího úkolu může stát na jednom místě X
- Jaké bude pravděpodobnostní rozložení $P(X|e_{1:t})$ po t načtených hodnotách?

(Jak) Zpřesňují hodnoty z čidel přesnost umístění robota?

Opakované čtení z čidel na jednom místě

- Uvažujme, že robot z domácího úkolu může stát na jednom místě X
- Jaké bude pravděpodobnostní rozložení $P(X|e_{1:t})$ po t načtených hodnotách?

Matematicky ekvivalentní problém

- V pytlíku máme k různě nevyvážených mincí
- Na i-té minci padá panna s pravděpodobností p_i, které známe
- Náhodně vybereme jednu minci X a výsledky k hodů označíme $e_{1:t}$
- Jak spočítat $P(X|e_{1:t})$?

(Jak) Zpřesňují hodnoty z čidel přesnost umístění robota?

Opakované čtení z čidel na jednom místě

- Uvažujme, že robot z domácího úkolu může stát na jednom místě X
- Jaké bude pravděpodobnostní rozložení $P(X|e_{1:t})$ po t načtených hodnotách?

Matematicky ekvivalentní problém

- V pytlíku máme k různě nevyvážených mincí
- Na i-té minci padá panna s pravděpodobností p_i, které známe
- Náhodně vybereme jednu minci X a výsledky k hodů označíme $e_{1:t}$
- Jak spočítat $P(X|e_{1:t})$?

Numerický příklad

- V pytlíku jsou tři mince s $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.6$ a $p_3 = 0.8$
- Náhodně jednu vybereme
- Při třech hodech padne $e_{1:3} =$ panna, orel, panna
- S jakou pravděpodobností jsme vybrali jednotlivé mince?