Optimalizační metody
NOPT048

Jirka Fink
https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Letní semestr 2016/17
Poslední změna 1. března 2017

Přednášející: Martin Loebl

Literatura

Literatura

- J. Matoušek, B. Gärtner, Understanding and using linear programming, Springer, 2006.
- W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, A. Schrijver, Combinatorial Optimization, John Wiley, 1997

Příklad úlohy lineárního programování

Zadání

Sestavte úlohu lineárního programování, která minimalizuje cenu zeleniny obsahující požadované množství vitamínů a vlákniny.

	mrkev	zelí	okurky	požadováno na 1 porci
vitamín A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
vitamín C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
vláknina [g/kg]	30	20	10	4 g
cena [KČ/kg]	15	10	3	

Příklad úlohy lineárního programování

Zadání

Sestavte úlohu lineárního programování, která minimalizuje cenu zeleniny obsahující požadované množství vitamínů a vlákniny.

	mrkev	zelí	okurky	požadováno na 1 porci
vitamín A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
vitamín C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
vláknina [g/kg]	30	20	10	4 g
cena [KČ/kg]	15	10	3	

Úloha lineárního programování

$$
\begin{array}{lccccccccl}
 & \text{mrkev} & & \text{zelí} & & \text{okurky} & & & & \\
\text{Minimalizovat} & 15\boldsymbol{x}_1 & + & 10\boldsymbol{x}_2 & + & 3\boldsymbol{x}_3 & & & & \text{cena} \\
\text{za podmínek} & 35\boldsymbol{x}_1 & + & 0.5\boldsymbol{x}_2 & + & 0.5\boldsymbol{x}_3 & \geq & 0.5 & & \text{vitamín A} \\
 & 60\boldsymbol{x}_1 & + & 300\boldsymbol{x}_2 & + & 10\boldsymbol{x}_3 & \geq & 15 & & \text{vitamín C} \\
 & 30\boldsymbol{x}_1 & + & 20\boldsymbol{x}_2 & + & 10\boldsymbol{x}_3 & \geq & 4 & & \text{vláknina} \\
 & \multicolumn{5}{l}{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \geq 0.} & & & &
\end{array}
$$

Maticový zápis úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Minimalizovat} & 15\boldsymbol{x}_1 & + & 10\boldsymbol{x}_2 & + & 3\boldsymbol{x}_3 & & \\
\text{za podmínek} & 35\boldsymbol{x}_1 & + & 0.5\boldsymbol{x}_2 & + & 0.5\boldsymbol{x}_3 & \geq & 0.5 \\
& 60\boldsymbol{x}_1 & + & 300\boldsymbol{x}_2 & + & 10\boldsymbol{x}_3 & \geq & 15 \\
& 30\boldsymbol{x}_1 & + & 20\boldsymbol{x}_2 & + & 10\boldsymbol{x}_3 & \geq & 4 \\
& \multicolumn{7}{l}{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \geq 0.}
\end{array}$$

Maticový zápis úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Minimalizovat} & 15\boldsymbol{x}_1 & + & 10\boldsymbol{x}_2 & + & 3\boldsymbol{x}_3 & & \\
\text{za podmínek} & 35\boldsymbol{x}_1 & + & 0.5\boldsymbol{x}_2 & + & 0.5\boldsymbol{x}_3 & \geq & 0.5 \\
 & 60\boldsymbol{x}_1 & + & 300\boldsymbol{x}_2 & + & 10\boldsymbol{x}_3 & \geq & 15 \\
 & 30\boldsymbol{x}_1 & + & 20\boldsymbol{x}_2 & + & 10\boldsymbol{x}_3 & \geq & 4 \\
 & \multicolumn{7}{l}{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \geq 0.}
\end{array}$$

Maticový zápis

- Minimalizovat

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$$

- Za podmínek

$$\begin{pmatrix} 35 & 0.5 & 0.5 \\ 60 & 300 & 10 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0.5 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \geq 0$

Rovnost a nerovnost vektorů

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ značíme

- $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, jestliže $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a

Rovnost a nerovnost vektorů

Pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ značíme

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a
- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Rovnost a nerovnost vektorů

Pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ značíme

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a
- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Systém lineárních rovnic

Pro danou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ typu $m \times n$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ výraz $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ značí systém m lineárních rovnic, kde $\boldsymbol{x}$ je vektor n reálných neznámých.

Systém lineárních rovnic a nerovnic

Rovnost a nerovnost vektorů

Pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ značíme

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a
- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Systém lineárních rovnic

Pro danou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ typu $m \times n$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ výraz $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ značí systém m lineárních rovnic, kde $\boldsymbol{x}$ je vektor n reálných neznámých.

Systém lineárních nerovnic

Pro danou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ typu $m \times n$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ výraz $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ značí systém m lineárních nerovnic, kde $\boldsymbol{x}$ je vektor n reálných neznámých.

Systém lineárních rovnic a nerovnic

Rovnost a nerovnost vektorů

Pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ značíme

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a
- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, jestliže $\boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Systém lineárních rovnic

Pro danou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ typu $m \times n$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ výraz $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ značí systém m lineárních rovnic, kde $\boldsymbol{x}$ je vektor n reálných neznámých.

Systém lineárních nerovnic

Pro danou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ typu $m \times n$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ výraz $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ značí systém m lineárních nerovnic, kde $\boldsymbol{x}$ je vektor n reálných neznámých.

Příklad maticového zápisu lineárních nerovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & + & \boldsymbol{x}_3 & \leq & 14 \\ 2\boldsymbol{x}_1 & + & 5\boldsymbol{x}_2 & + & 5\boldsymbol{x}_3 & \leq & 30 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Matematická optimalizace

je výběr nejlepšího prvku (podle daného kritéria) z dané množiny prvků.

Optimizace

Matematická optimalizace

je výběr nejlepšího prvku (podle daného kritéria) z dané množiny prvků.

Příklad

- Minimalizovat $x^2 + y^2$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Optimizace

Matematická optimalizace

je výběr nejlepšího prvku (podle daného kritéria) z dané množiny prvků.

Příklad

- Minimalizovat $x^2 + y^2$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Minimální kostra v grafu

Optimizace

Matematická optimalizace

je výběr nejlepšího prvku (podle daného kritéria) z dané množiny prvků.

Příklad

- Minimalizovat $x^2 + y^2$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Minimální kostra v grafu
- Nejkratší cesta mezi zadanými vrcholy v grafu

Optimizace

Matematická optimalizace

je výběr nejlepšího prvku (podle daného kritéria) z dané množiny prvků.

Příklad

- Minimalizovat $x^2 + y^2$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Minimální kostra v grafu
- Nejkratší cesta mezi zadanými vrcholy v grafu

Optimalizační problém

Optimalizační úlohou pro danou množinu řešení M a cílovou funkci $f : M \to \mathbb{R}$ rozumíme hledání řešení $x \in M$ minimalizující (nebo maximalizující) hodnotu cílové funkce $f(x)$.

Optimizace

Matematická optimalizace

je výběr nejlepšího prvku (podle daného kritéria) z dané množiny prvků.

Příklad

- Minimalizovat $x^2 + y^2$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Minimální kostra v grafu
- Nejkratší cesta mezi zadanými vrcholy v grafu

Optimalizační problém

Optimalizační úlohou pro danou množinu řešení M a cílovou funkci $f : M \to \mathbb{R}$ rozumíme hledání řešení $x \in M$ minimalizující (nebo maximalizující) hodnotu cílové funkce $f(x)$.

Převod mezi minimalizací a maximalizací

Pokud $\min_{x \in M} f(x)$ existuje, pak taky existuje $\max_{x \in M} -f(x)$ a platí $-\min_{x \in M} f(x) = \max_{x \in M} -f(x)$.

Úloha lineárního programování (LP)

V úloze lineárního programování chceme najít vektor $\boldsymbol{x}^\star \in \mathbb{R}^n$ maximalizující (nebo minimalizující) hodnotu dané lineární funkce mezi všemi vektory $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujícími danou soustavu lineárních rovnic a nerovnic.

Rovnicový tvar úlohy LP: $\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Nerovnicový tvar úlohy LP: $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$,

kde $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Úloha lineárního programování (LP)

V úloze lineárního programování chceme najít vektor $\boldsymbol{x}^\star \in \mathbb{R}^n$ maximalizující (nebo minimalizující) hodnotu dané lineární funkce mezi všemi vektory $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujícími danou soustavu lineárních rovnic a nerovnic.

Rovnicový tvar úlohy LP: $\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

Nerovnicový tvar úlohy LP: $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$,

kde $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Převod rovnicového tvaru na nerovnicový

$\max -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$, $-\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$

Úloha lineárního programování (LP)

V úloze lineárního programování chceme najít vektor $\boldsymbol{x}^\star \in \mathbb{R}^n$ maximalizující (nebo minimalizující) hodnotu dané lineární funkce mezi všemi vektory $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujícími danou soustavu lineárních rovnic a nerovnic.

Rovnicový tvar úlohy LP: $\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

Nerovnicový tvar úlohy LP: $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$,

kde $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Převod rovnicového tvaru na nerovnicový

$\max -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$, $-\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$

Převod nerovnicového tvaru na rovnicový

$\min -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}''$ za podmínek $A\boldsymbol{x}' - A\boldsymbol{x}'' + I\boldsymbol{x}''' = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}''' \geq \mathbf{0}$

Základní terminologie

- Řešením rozumíme libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, kde n je počet neznámých.
- Řešení je přípustné, jestliže splňuje všechny zadané podmínky, např. $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$.
- Cílová funkce je funkce, kterou chceme maximalizovat (nebo minimalizovat), např. $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.
- Optimální řešení je přípustné řešení s maximální hodnotou cílové funkce (chceme-li cílovou funkci maximalizovat).
- Problém je nepřípustný, jestliže neexistuje přípustné řešení.
- Problém je neomezený, jestliže existují přípustná řešení s libovolně velkou hodnotou cílové funkce (chceme-li cílovou funkci maximalizovat).
- Polyerd je množina bodů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ pro nějaká $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
- Polytop je omezený polyerd (tj. existuje $z \in \mathbb{R}$ takové, že $||\boldsymbol{x}|| \leq z$ pro všechna splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$).

Toky v sítích

Problém

Každé spojení dvou počítačů u a v v síti má přenosovou rychlost $\boldsymbol{c}_{uv}$. Jak nalézt maximální přenosovou rychlost mezi počítači s a t, jestliže se datový tok může větvit?

Toky v sítích

Problém

Každé spojení dvou počítačů u a v v síti má přenosovou rychlost $\boldsymbol{c}_{uv}$. Jak nalézt maximální přenosovou rychlost mezi počítači s a t, jestliže se datový tok může větvit?

Řešení

- Všechny hrany zorientujeme
- Proměnná $\boldsymbol{x}_{uv}$ udává datový tok z u do v (může být záporná)
- Podmínka omezující maximální rychlost je $-\boldsymbol{c}_{uv} \leq \boldsymbol{x}_{uv} \leq \boldsymbol{c}_{uv}$ pro každou orientovanou hranu uv
- Data nemohou být ukládána ani ztracena v žádném počítači u kromě s a t: $\sum_{v:uv \in E} \boldsymbol{x}_{uv} = \sum_{v:vu \in E} \boldsymbol{x}_{vu}$
- Cílem je maximalizovat tok: $\max \sum_{v:sv \in E} \boldsymbol{x}_{sv} - \sum_{v:vs \in E} \boldsymbol{x}_{vs}$

Toky v sítích

Problém

Každé spojení dvou počítačů u a v v síti má přenosovou rychlost $\boldsymbol{c}_{uv}$. Jak nalézt maximální přenosovou rychlost mezi počítači s a t, jestliže se datový tok může větvit?

Řešení

- Všechny hrany zorientujeme
- Proměnná $\boldsymbol{x}_{uv}$ udává datový tok z u do v (může být záporná)
- Podmínka omezující maximální rychlost je $-\boldsymbol{c}_{uv} \leq \boldsymbol{x}_{uv} \leq \boldsymbol{c}_{uv}$ pro každou orientovanou hranu uv
- Data nemohou být ukládána ani ztracena v žádném počítači u kromě s a t: $\sum_{v:uv \in E} \boldsymbol{x}_{uv} = \sum_{v:vu \in E} \boldsymbol{x}_{vu}$
- Cílem je maximalizovat tok: $\max \sum_{v:sv \in E} \boldsymbol{x}_{sv} - \sum_{v:vs \in E} \boldsymbol{x}_{vs}$

Maticový zápis

- Přidáme pomocnou hranu $\boldsymbol{x}_{ts}$ s dostatečně velkou hranou $\boldsymbol{c}_{ts}$

Cílová funkce: $\max \boldsymbol{x}_{ts}$

Zachování toku: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ kde A je matice incidence

Kapacita: $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{c}$

Příklad

Nakreslit množinu všech přípustných řešení (x_1, x_2) splňující následující podmínky.

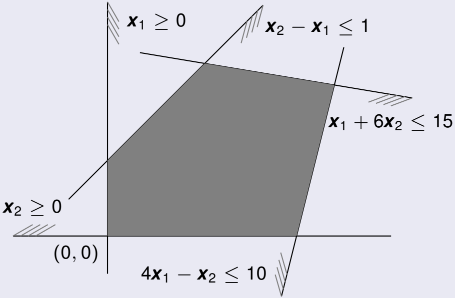
$$\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Příklad

Nakreslit množinu všech přípustných řešení $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ splňující následující podmínky.

$$\begin{array}{rcrcr} \boldsymbol{x}_1 & + & 6\boldsymbol{x}_2 & \leq & 15 \\ 4\boldsymbol{x}_1 & - & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 10 \\ -\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 1 \\ & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Množinu přípustných řešení tvoří pětiúhelník



Příklad

Nalézt optimální řešení následujícího problému.

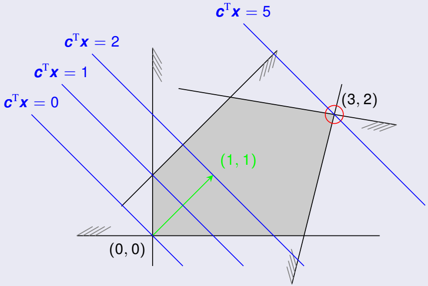
$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
 & 4x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Příklad

Nalézt optimální řešení následujícího problému.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximalizovat} & \boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & & \\ & \boldsymbol{x}_1 & + & 6\boldsymbol{x}_2 & \leq & 15 \\ & 4\boldsymbol{x}_1 & - & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 10 \\ & -\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 1 \\ & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení



Grafická metoda: Více optimálních řešení

Příklad

Nalést všechna optimální řešení následujícího problému.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Maximize} & \frac{1}{6}\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & & \\
& \boldsymbol{x}_1 & + & 6\boldsymbol{x}_2 & \leq & 15 \\
& 4\boldsymbol{x}_1 & - & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 10 \\
& -\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 1 \\
& & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

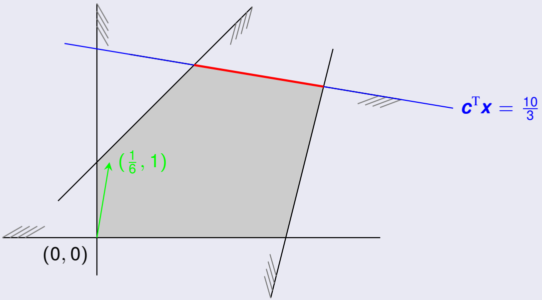
Grafická metoda: Více optimálních řešení

Příklad

Nalést všechna optimální řešení následujícího problému.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Maximize} & \frac{1}{6}\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & & \\
 & \boldsymbol{x}_1 & + & 6\boldsymbol{x}_2 & \leq & 15 \\
 & 4\boldsymbol{x}_1 & - & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 10 \\
 & -\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 1 \\
 & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Řešení



Příklad

Ukažte, že následující úloha je neomezená.

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximalizovat} & \boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & & \\ & -\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 1 \\ & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0 \end{array}$$

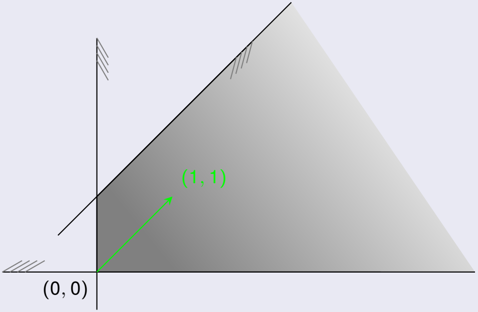
Grafická metoda: Neomezená úloha

Příklad

Ukažte, že následující úloha je neomezená.

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{Maximalizovat} & x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení



Grafická metoda: Nepřípustná úloha

Příklad

Ukázat, že následující úloha nemá přípustné řešení.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\text{Maximalizovat} & \boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & & \\
 & \boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & -2 \\
 & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

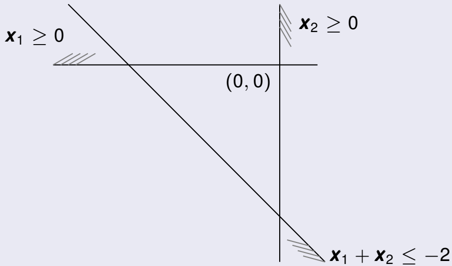
Grafická metoda: Nepřípustná úloha

Příklad

Ukázat, že následující úloha nemá přípustné řešení.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\text{Maximalizovat} & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Řešení



Existence optimálního řešení

Definice

Úloha max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínky $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je

- přípustná, jestliže existuje $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, a
- omezená, jestliže existuje $o \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq o$.

Existence optimálního řešení

Definice

Úloha max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínky $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je

- přípustná, jestliže existuje $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, a
- omezená, jestliže existuje $o \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq o$.

Věta

Jestliže je polyedr $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ je omezený, pak úloha max $\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ má optimální řešení pro všechna $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Existence optimálního řešení

Definice

Úloha max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínky $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je

- přípustná, jestliže existuje $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, a
- omezená, jestliže existuje $o \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq o$.

Věta

Jestliže je polyedr $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ je omezený, pak úloha max $\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ má optimální řešení pro všechna $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz (pomocí matematické analýzy)

Spojitá funkce na kompaktní množině nabývá maxima.

Existence optimálního řešení

Definice

Úloha max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínky $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je

- přípustná, jestliže existuje $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, a
- omezená, jestliže existuje $o \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ splňující $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq o$.

Věta

Jestliže je polyedr $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ je omezený, pak úloha max $\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ má optimální řešení pro všechna $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz (pomocí matematické analýzy)

Spojitá funkce na kompaktní množině nabývá maxima.

Poznámky

- Úloha max $\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ může mít optimální řešení, i když je polyedr $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ je neomezený.
- Každá přípustná omezená úloha lineárního programování má optimální řešení.

Příklad celočíselného lineárního programování

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí grafu (V, E) je množina vrcholů $U \subseteq V$ taková, že každá hrana má alespoň jeden koncový vrchol v U.

Příklad celočíselného lineárního programování

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí grafu (V, E) je množina vrcholů $U \subseteq V$ taková, že každá hrana má alespoň jeden koncový vrchol v U.

Celočíselné lineární programování

Pro vrchol v máme proměnnou $\boldsymbol{x}_v \in \{0, 1\}$ udávající, zda v náleží do pokrytí. Omezení na vrchol v jsou $0 \leq \boldsymbol{x}_v \leq 1$ a $\boldsymbol{x}_v \in \mathbb{Z}$ a na hranu uv máme omezení $\boldsymbol{x}_u + \boldsymbol{x}_v \geq 1$. Cílová funkce je min $\sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u$.

Příklad celočíselného lineárního programování

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí grafu (V, E) je množina vrcholů $U \subseteq V$ taková, že každá hrana má alespoň jeden koncový vrchol v U.

Celočíselné lineární programování

Pro vrchol v máme proměnnou $\boldsymbol{x}_v \in \{0, 1\}$ udávající, zda v náleží do pokrytí. Omezení na vrchol v jsou $0 \leq \boldsymbol{x}_v \leq 1$ a $\boldsymbol{x}_v \in \mathbb{Z}$ a na hranu uv máme omezení $\boldsymbol{x}_u + \boldsymbol{x}_v \geq 1$. Cílová funkce je min $\sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u$.

Maticový zápis

min $\mathbf{1}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}$ a $\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^{|V|}$, kde A je matice incidence

Příklad celočíselného lineárního programování

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí grafu (V, E) je množina vrcholů $U \subseteq V$ taková, že každá hrana má alespoň jeden koncový vrchol v U.

Celočíselné lineární programování

Pro vrchol v máme proměnnou $\boldsymbol{x}_v \in \{0, 1\}$ udávající, zda v náleží do pokrytí. Omezení na vrchol v jsou $0 \leq \boldsymbol{x}_v \leq 1$ a $\boldsymbol{x}_v \in \mathbb{Z}$ a na hranu uv máme omezení $\boldsymbol{x}_u + \boldsymbol{x}_v \geq 1$. Cílová funkce je min $\sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u$.

Maticový zápis

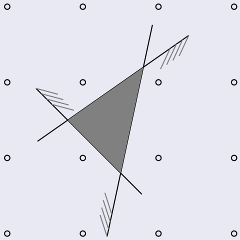
min $\mathbf{1}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}$ a $\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^{|V|}$, kde A je matice incidence

Časová složitost

- Pro úlohu lineární programování existují efektivní (polynomiální) algoritmy.
- Úloha celočíselného lineárního programování je NP-těžká.

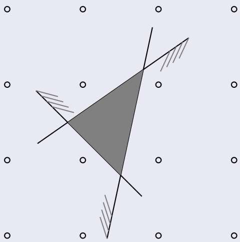
Vztah optimálního celočíselného a relaxovaného řešení

Neprázdný polyedr nemusí obsahovat celočíselný bod

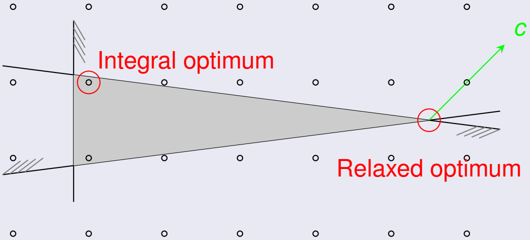


Vztah optimálního celočíselného a relaxovaného řešení

Neprázdný polyedr nemusí obsahovat celočíselný bod



Celočíselné přípustné řešení nemusíme získat zaokrouhlením relaxovaného řešení



Příklad: Plánování výroby zmrzliny

Popis

- Zmrzlinář potřebuje naplánovat výrobu zmrzliny na příští rok
- Odhad prodeje zmrzliny v měsíci $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $\boldsymbol{d}_i$ (v tunách)
- Skladování jedné tuny zmrzliny jeden měsíc stojí a
- Zvýšení nebo snížení výroby oproti předcházejícímu měsíci stojí b na jednu tunu
- Vyrobená zmrzlina může být skladována nejvýše jeden měsíc
- Jak nalézt plán výroby s nejmenšími náklady?

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \ldots, n\}$

Příklad: Plánování výroby zmrzliny

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \dots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i - 1$ do i

Příklad: Plánování výroby zmrzliny

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \dots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i - 1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$

Příklad: Plánování výroby zmrzliny

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \ldots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i - 1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \leq \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \dots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i - 1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \leq \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Nezápornost výroby a skladových zásob $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$

Příklad: Plánování výroby zmrzliny

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \ldots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i - 1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \leq \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Nezápornost výroby a skladových zásob $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$
- Cílová funkce $\min b \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}| + a \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i$ není lineární

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \ldots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i-1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \le \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Nezápornost výroby a skladových zásob $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \ge \mathbf{0}$
- Cílová funkce min $b \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}| + a \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i$ není lineární
- Proměnná $\boldsymbol{y}_i \ge 0$ udává zvýšení produkce a $\boldsymbol{z}_i \ge 0$ udává snížení produkce a $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{z}_i$

Příklad: Plánování výroby zmrzliny

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \ldots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i-1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \leq \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Nezápornost výroby a skladových zásob $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$
- Cílová funkce $\min b \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}| + a \sum_{i=1}^n \boldsymbol{s}_i$ není lineární
- Proměnná $\boldsymbol{y}_i \geq 0$ udává zvýšení produkce a $\boldsymbol{z}_i \geq 0$ udává snížení produkce a $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{z}_i$
- Úloha lineárního programování řešící zadaný problém je

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Minimalizovat} & b \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{z}_i) + a \sum_{i=1}^n \boldsymbol{s}_i & & & \\
\text{za podmínek} & \boldsymbol{s}_{i-1} - \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{x}_i & = & \boldsymbol{d}_i & \text{pro } i \in \{1, \ldots, n\} \\
 & \boldsymbol{s}_{i-1} & \leq & \boldsymbol{d}_i & \text{pro } i \in \{1, \ldots, n\} \\
 & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} & \geq & \mathbf{0} &
\end{array}
$$

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \dots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i-1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \le \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Nezápornost výroby a skladových zásob $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \ge \mathbf{0}$
- Cílová funkce min $b \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}| + a \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i$ není lineární
- Proměnná $\boldsymbol{y}_i \ge 0$ udává zvýšení produkce a $\boldsymbol{z}_i \ge 0$ udává snížení produkce a $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{z}_i$
- Úloha lineárního programování řešící zadaný problém je

$$\begin{array}{llcll}
\text{Minimalizovat} & b \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{z}_i) + a \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i & & & \\
\text{za podmínek} & \boldsymbol{s}_{i-1} - \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{x}_i & = & \boldsymbol{d}_i & \text{pro } i \in \{1, \dots, n\} \\
 & \boldsymbol{s}_{i-1} & \le & \boldsymbol{d}_i & \text{pro } i \in \{1, \dots, n\} \\
 & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} & \ge & \mathbf{0} &
\end{array}$$

- Navíc můžeme omezit počáteční a konečné množství uskladněné zmrzliny $\boldsymbol{s}_0$ a $\boldsymbol{s}_n$

Řešení (formulace pomocí lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_i$ udává množství vyrobené zmrzliny v měsíci $i \in \{0, \dots, n\}$
- Proměnná $\boldsymbol{s}_i$ udává množství uskladněné zmrzliny z měsíce $i-1$ do i
- Množství uskladněné zmrzliny je dáno rovnicí $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_{i-1} + \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Trvanlivost je zaručena podmínkou $\boldsymbol{s}_i \leq \boldsymbol{d}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Nezápornost výroby a skladových zásob $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$
- Cílová funkce $\min b \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}| + a \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i$ není lineární
- Proměnná $\boldsymbol{y}_i \geq 0$ udává zvýšení produkce a $\boldsymbol{z}_i \geq 0$ udává snížení produkce a $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{z}_i$
- Úloha lineárního programování řešící zadaný problém je

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Minimalizovat} & b \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{z}_i) + a \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i & & & \\
\text{za podmínek} & \boldsymbol{s}_{i-1} - \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{x}_i & = & \boldsymbol{d}_i & \text{pro } i \in \{1, \dots, n\} \\
 & \boldsymbol{s}_{i-1} & \leq & \boldsymbol{d}_i & \text{pro } i \in \{1, \dots, n\} \\
 & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} & \geq & \mathbf{0} &
\end{array}
$$

- Navíc můžeme omezit počáteční a konečné množství uskladněné zmrzliny $\boldsymbol{s}_0$ a $\boldsymbol{s}_n$
- Můžeme taky zadat $\boldsymbol{x}_0$

Hledání nejkratších cest z vrcholu s v orientovaném grafu

Úloha lineárního programování je

$$
\begin{array}{llll}
\text{Maximalizovat} & \sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u & & \\
\text{za podmínek} & \boldsymbol{x}_v - \boldsymbol{x}_u & \leq & \boldsymbol{c}_{uv} \quad \text{pro všechny hrany } uv \\
 & \boldsymbol{x}_s & = & 0
\end{array}
$$

Úloha lineárního programování je

$$\begin{array}{lrcll} \text{Maximalizovat} & \sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u & & & \\ \text{za podmínek} & \boldsymbol{x}_v - \boldsymbol{x}_u & \leq & \boldsymbol{c}_{uv} & \text{pro všechny hrany } uv \\ & \boldsymbol{x}_s & = & 0 & \end{array}$$

Důkaz (optimální řešení $\boldsymbol{x}_u^\star$ udává délku nejkratší cesty z s do u $\forall u \in V$)

1. Nechť $\boldsymbol{y}_u$ je délka nejkratší cesty do vrcholu u

Úloha lineárního programování je

$$\begin{array}{llll} \text{Maximalizovat} & \sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u & & \\ \text{za podmínek} & \boldsymbol{x}_v - \boldsymbol{x}_u & \leq & \boldsymbol{c}_{uv} \quad \text{pro všechny hrany } uv \\ & \boldsymbol{x}_s & = & 0 \end{array}$$

Důkaz (optimální řešení $\boldsymbol{x}_u^\star$ udává délku nejkratší cesty z s do u $\forall u \in V$)

1. Nechť $\boldsymbol{y}_u$ je délka nejkratší cesty do vrcholu u
2. Platí $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^\star$
   - Nechť P jsou hrany nejkratší cesty z vrcholu s do z
   - $\boldsymbol{y}_z = \sum_{uv \in P} \boldsymbol{c}_{uv} \geq \sum_{uv} \boldsymbol{x}_v^\star - \boldsymbol{x}_u^\star = \boldsymbol{x}_z^\star - \boldsymbol{y}_s^\star = \boldsymbol{x}_z^\star$

Hledání nejkratších cest z vrcholu s v orientovaném grafu

Úloha lineárního programování je

$$\begin{array}{llcll} \text{Maximalizovat} & \sum_{u \in V} \boldsymbol{x}_u & & & \\ \text{za podmínek} & \boldsymbol{x}_v - \boldsymbol{x}_u & \leq & \boldsymbol{c}_{uv} & \text{pro všechny hrany } uv \\ & \boldsymbol{x}_s & = & 0 & \end{array}$$

Důkaz (optimální řešení $\boldsymbol{x}^\star_u$ udává délku nejkratší cesty z s do u $\forall u \in V$)

1. Nechť $\boldsymbol{y}_u$ je délka nejkratší cesty do vrcholu u
2. Platí $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^\star$
   - Nechť P jsou hrany nejkratší cesty z vrcholu s do z
   - $\boldsymbol{y}_z = \sum_{uv \in P} \boldsymbol{c}_{uv} \geq \sum_{uv} \boldsymbol{x}^\star_v - \boldsymbol{x}^\star_u = \boldsymbol{x}^\star_z - \boldsymbol{y}^\star_s = \boldsymbol{x}^\star_z$
3. Platí $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\star$
   - Sporem $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^\star$
   - Tedy $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^\star$ a $\sum_{u \in V} \boldsymbol{y}_u > \sum_{u \in V} \boldsymbol{x}^\star_u$
   - Ale $\boldsymbol{y}$ je přípustné řešení a $\boldsymbol{x}^\star$ je optimální řešení

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Řešení (formulace pomocí celočíselného lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$, pokud j-tý loupežník dostane i-tý obraz, jinak $\boldsymbol{x}_{i,j} = 0$

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Řešení (formulace pomocí celočíselného lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$, pokud j-tý loupežník dostane i-tý obraz, jinak $\boldsymbol{x}_{i,j} = 0$
- Každý obraz připadne jednomu loupežníkovi: $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_{i,j} = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Řešení (formulace pomocí celočíselného lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$, pokud j-tý loupežník dostane i-tý obraz, jinak $\boldsymbol{x}_{i,j} = 0$
- Každý obraz připadne jednomu loupežníkovi: $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_{i,j} = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$
- Cena obrazů, které dostane j-tý loupežník je $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Řešení (formulace pomocí celočíselného lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$, pokud j-tý loupežník dostane i-tý obraz, jinak $\boldsymbol{x}_{i,j} = 0$
- Každý obraz připadne jednomu loupežníkovi: $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_{i,j} = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$
- Cena obrazů, které dostane j-tý loupežník je $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$
- Cílová funkce $\max \min_{j \in \{i,\ldots,k\}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$ není lineární

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Řešení (formulace pomocí celočíselného lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$, pokud j-tý loupežník dostane i-tý obraz, jinak $\boldsymbol{x}_{i,j} = 0$
- Každý obraz připadne jednomu loupežníkovi: $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_{i,j} = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$
- Cena obrazů, které dostane j-tý loupežník je $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$
- Cílová funkce $\max \min_{j \in \{i,\ldots,k\}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$ není lineární
- Přidejme proměnnou m, jejíž hodnota je nejvýše cena nejméně cenného dílu: $m \leq \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$ pro všechna $j \in \{i, \ldots, k\}$

Příklad: Loupežníci

Popis

- k loupežníkům se podařilo získat n obrazů ceně $\boldsymbol{c}_1$ až $\boldsymbol{c}_n$
- Obrazy si chtějí rozdělit tak, aby nikdo nedostal příliš malý díl, tj. hodnota obrazů v nejméně cenném dílu musí být co největší

Řešení (formulace pomocí celočíselného lineárního programování)

- Proměnná $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$, pokud j-tý loupežník dostane i-tý obraz, jinak $\boldsymbol{x}_{i,j} = 0$
- Každý obraz připadne jednomu loupežníkovi: $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_{i,j} = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$
- Cena obrazů, které dostane j-tý loupežník je $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$
- Cílová funkce $\max \min_{j \in \{i,\ldots,k\}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$ není lineární
- Přidejme proměnnou m, jejíž hodnota je nejvýše cena nejméně cenného dílu: $m \leq \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_{i,j}$ pro všechna $j \in \{i, \ldots, k\}$
- Cílová funkce je $\max m$

Simplexová metoda (Dantzig, 1947)

- V praxi efektivní algoritmus
- Není známe pivotovací pravidlo, které by zaručovalo polynomiální složitost

Simplexová metoda (Dantzig, 1947)

- V praxi efektivní algoritmus
- Není známe pivotovací pravidlo, které by zaručovalo polynomiální složitost

Elipsoidová metoda (Khachiyan, 1979)

- Polynomiální algoritmus: Vyžaduje $\mathcal{O}\left(n^4 L\right)$ operací na $\mathcal{O}(L)$-bitových číslech, kde n je počet proměnných a L je počet bitů z zakódování vstupu (A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$).
- V praxi podstatně pomalejší než simplexová metoda

Algoritmy na lineární programování

Simplexová metoda (Dantzig, 1947)

- V praxi efektivní algoritmus
- Není známe pivotovací pravidlo, které by zaručovalo polynomiální složitost

Elipsoidová metoda (Khachiyan, 1979)

- Polynomiální algoritmus: Vyžaduje $\mathcal{O}\left(n^4 L\right)$ operací na $\mathcal{O}(L)$-bitových číslech, kde n je počet proměnných a L je počet bitů z zakódování vstupu (A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$).
- V praxi podstatně pomalejší než simplexová metoda

Metody vnitřních bodů

- Polynomiální složitost (v n a L)
- Srovnatelně rychlé jako simplexová metoda (záleží na konkrétní instanci)

Algoritmy na lineární programování

Simplexová metoda (Dantzig, 1947)

- V praxi efektivní algoritmus
- Není známe pivotovací pravidlo, které by zaručovalo polynomiální složitost

Elipsoidová metoda (Khachiyan, 1979)

- Polynomiální algoritmus: Vyžaduje $\mathcal{O}(n^4 L)$ operací na $\mathcal{O}(L)$-bitových číslech, kde n je počet proměnných a L je počet bitů z zakódování vstupu (A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$).
- V praxi podstatně pomalejší než simplexová metoda

Metody vnitřních bodů

- Polynomiální složitost (v n a L)
- Srovnatelně rychlé jako simplexová metoda (záleží na konkrétní instanci)

Poznámky

- Pro lineární programování není znám algoritmus se složitostí polynomiální v počtu proměnných a podmínek
- Celočíselní lineární programování je NP-těžké

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Pozorování

- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in R^n$, pak $L + \boldsymbol{x}$ je afinní prostor.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Pozorování

- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in R^n$, pak $L + \boldsymbol{x}$ je afinní prostor.
- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in L$, pak $L - \boldsymbol{x}$ je vektorový prostor.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Pozorování

- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in R^n$, pak $L + \boldsymbol{x}$ je afinní prostor.
- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in L$, pak $L - \boldsymbol{x}$ je vektorový prostor.
- Jestliže L je afinní prostor, pak $L - \boldsymbol{x} = L - \boldsymbol{y}$ pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Pozorování

- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in R^n$, pak $L + \boldsymbol{x}$ je afinní prostor.
- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in L$, pak $L - \boldsymbol{x}$ je vektorový prostor.
- Jestliže L je afinní prostor, pak $L - \boldsymbol{x} = L - \boldsymbol{y}$ pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$.
- Afinní prostor L je vektorový právě tehdy, když obsahuje počátek.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Pozorování

- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in R^n$, pak $L + \boldsymbol{x}$ je afinní prostor.
- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in L$, pak $L - \boldsymbol{x}$ je vektorový prostor.
- Jestliže L je afinní prostor, pak $L - \boldsymbol{x} = L - \boldsymbol{y}$ pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$.
- Afinní prostor L je vektorový právě tehdy, když obsahuje počátek.

Souvislost afinního prostoru a soustavy lineárních rovnic

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový prostor právě tehdy, když V je množina všech řešení nějaké homogenní soustavy lineárních rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Affiní prostory

Věta

Neprázdná množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový (lineární) prostor právě tehdy, když $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in V$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Definice

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor (anglicky affine space), pokud $L = V + \boldsymbol{a}$ pro nějaké $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorový prostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $V + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{x} \in L\}$.

Pozorování

- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in R^n$, pak $L + \boldsymbol{x}$ je afinní prostor.
- Jestliže L je afinní prostor a $\boldsymbol{x} \in L$, pak $L - \boldsymbol{x}$ je vektorový prostor.
- Jestliže L je afinní prostor, pak $L - \boldsymbol{x} = L - \boldsymbol{y}$ pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$.
- Afinní prostor L je vektorový právě tehdy, když obsahuje počátek.

Souvislost afinního prostoru a soustavy lineárních rovnic

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří vektorový prostor právě tehdy, když V je množina všech řešení nějaké homogenní soustavy lineárních rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
- $L \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří afinní prostor právě tehdy, když L je množina všech řešení nějaké konsistentní soustavy lineárních rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Pozorování

Neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor právě tehdy, když M obsahuje celou přímku danou každými dvěma body z M.

Konvexní množina

Pozorování

Neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor právě tehdy, když M obsahuje celou přímku danou každými dvěma body z M.

Definice

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, jestliže M obsahuje celou úsečku mezi každými dvěma body z M.

Konvexní množina

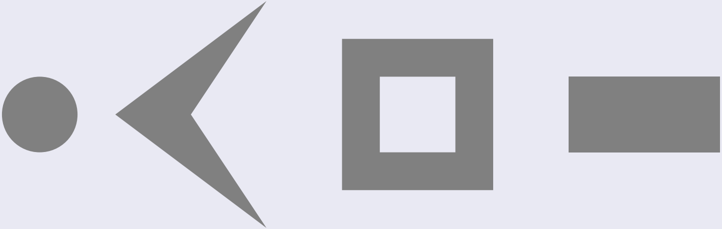
Pozorování

Neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor právě tehdy, když M obsahuje celou přímku danou každými dvěma body z M.

Definice

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, jestliže M obsahuje celou úsečku mezi každými dvěma body z M.

Příklad



Konvexní množina

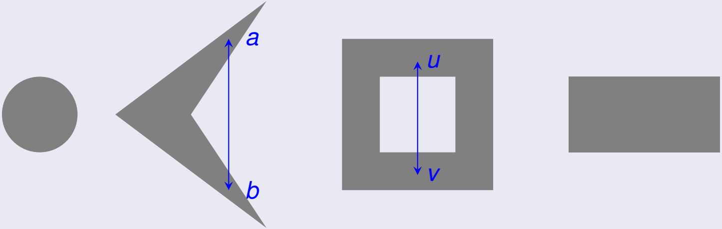
Pozorování

Neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor právě tehdy, když M obsahuje celou přímku danou každými dvěma body z M.

Definice

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, jestliže M obsahuje celou úsečku mezi každými dvěma body z M.

Příklad



Pozorování

- Průnik libovolného počtu vektorových prostorů tvoří vektorový prostor.
- Neprázdný průnik libovolného počtu afinních prostorů tvoří afinní prostor.
- Průnik libovolného počtu konvexních množinu tvoří konvexní množinu.

Lineární, afinní a konvexní obaly

Pozorování

- Průnik libovolného počtu vektorových prostorů tvoří vektorový prostor.
- Neprázdný průnik libovolného počtu afinních prostorů tvoří afinní prostor.
- Průnik libovolného počtu konvexních množinu tvoří konvexní množinu.

Definice

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina.

- Lineární obal $\text{span}(S)$ je průnik všech vektorových prostorů obsahujících S.
- Afinní obal $\text{aff}(S)$ je průnik všech afinních prostorů obsahujících S.
- Konvexní obal $\text{conv}(S)$ je průnik všech konvexních množin obsahujících S.

Lineární, afinní a konvexní obaly

Pozorování

- Průnik libovolného počtu vektorových prostorů tvoří vektorový prostor.
- Neprázdný průnik libovolného počtu afinních prostorů tvoří afinní prostor.
- Průnik libovolného počtu konvexních množinu tvoří konvexní množinu.

Definice

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina.

- Lineární obal $\mathrm{span}(S)$ je průnik všech vektorových prostorů obsahujících S.
- Afinní obal $\mathrm{aff}(S)$ je průnik všech afinních prostorů obsahujících S.
- Konvexní obal $\mathrm{conv}(S)$ je průnik všech konvexních množin obsahujících S.

Pozorování

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina.

- S je vektorový prostor právě tehdy, když $S = \mathrm{span}(S)$.
- S je afinní prostor právě tehdy, když $S = \mathrm{aff}(S)$.
- S je konvexní množina právě tehdy, když $S = \mathrm{conv}(S)$.

Lineární, afinní a konvexní obaly

Pozorování

- Průnik libovolného počtu vektorových prostorů tvoří vektorový prostor.
- Neprázdný průnik libovolného počtu afinních prostorů tvoří afinní prostor.
- Průnik libovolného počtu konvexních množinu tvoří konvexní množinu.

Definice

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina.

- Lineární obal $\operatorname{span}(S)$ je průnik všech vektorových prostorů obsahujících S.
- Afinní obal $\operatorname{aff}(S)$ je průnik všech afinních prostorů obsahujících S.
- Konvexní obal $\operatorname{conv}(S)$ je průnik všech konvexních množin obsahujících S.

Pozorování

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina.

- S je vektorový prostor právě tehdy, když $S = \operatorname{span}(S)$.
- S je afinní prostor právě tehdy, když $S = \operatorname{aff}(S)$.
- S je konvexní množina právě tehdy, když $S = \operatorname{conv}(S)$.
- $\operatorname{span}(S) = \operatorname{aff}(S \cup \{\mathbf{0}\})$

Definice

Nechť $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou vektory $\mathbb{R}^n$, kde k je kladné celé číslo.

- $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ nazýváme lineární kombinací, jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ nazýváme afinní kombinací, jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.
- $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ nazýváme konvexní kombinací, jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Lineární, afinní a konvexní kombinace

Definice

Nechť $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou vektory $\mathbb{R}^n$, kde k je kladné celé číslo.

- $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ nazýváme lineární kombinací, jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ nazýváme afinní kombinací, jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.
- $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ nazýváme konvexní kombinací, jestliže $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ a $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

Věty

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina.

- Lineární obal span(S) je roven množině všech lineárních kombinací vektorů z S.
- Afinní obal span(S) je roven množině všech afinních kombinací vektorů z S.
- Konvexní obal span(S) je roven množině všech konvexních kombinací bodů z S.

Nezávislost

Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá, jestliže žádný vektor z S nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů z S.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinně nezávislá, jestliže žádný vektor z S nelze vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních vektorů z S.

Nezávislost

Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá, jestliže žádný vektor z S nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů z S.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinně nezávislá, jestliže žádný vektor z S nelze vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních vektorů z S.

Pozorování

- Vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé právě, když existuje netriviální kombinace $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ taková, že $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.
- Vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně závislé právě, když existuje netriviální kombinace $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ taková, že $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ a $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$.

Nezávislost

Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá, jestliže žádný vektor z S nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů z S.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinně nezávislá, jestliže žádný vektor z S nelze vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních vektorů z S.

Pozorování

- Vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé právě, když existuje netriviální kombinace $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ taková, že $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.
- Vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně závislé právě, když existuje netriviální kombinace $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ taková, že $\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ a $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$.

Pozorování

- Vektory $\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0$ jsou lineárně nezávislé.
- Vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektory $\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ jsou afinně nezávislé.

Báze

Definice

Nechť $B \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- B je báze vektorového prostoru S, jestliže B je lineárně nezávislá a $\text{span}(B) = S$.
- B je báze afinního prostoru S, jestliže B je afinně nezávislá a $\text{aff}(B) = S$.

Báze

Definice

Nechť $B \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- B je báze vektorového prostoru S, jestliže B je lineárně nezávislá a $\text{span}(B) = S$.
- B je báze afinního prostoru S, jestliže B je afinně nezávislá a $\text{aff}(B) = S$.

Věty

- Všechny báze vektorového prostoru S mají stejnou velikost.
- Všechny báze afinního prostoru S mají stejnou velikost.

Báze

Definice

Nechť $B \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- B je báze vektorového prostoru S, jestliže B je lineárně nezávislá a $\mathrm{span}(B) = S$.
- B je báze afinního prostoru S, jestliže B je afinně nezávislá a $\mathrm{aff}(B) = S$.

Věty

- Všechny báze vektorového prostoru S mají stejnou velikost.
- Všechny báze afinního prostoru S mají stejnou velikost.

Pozorování

Nechť S je vektorový prostor a $B \subseteq S \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pak B je báze B právě tehdy, když $B \cup \{\mathbf{0}\}$ je báze afinního prostoru S.

Báze

Definice

Nechť $B \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- B je báze vektorového prostoru S, jestliže B je lineárně nezávislá a $\operatorname{span}(B) = S$.
- B je báze afinního prostoru S, jestliže B je afinně nezávislá a $\operatorname{aff}(B) = S$.

Věty

- Všechny báze vektorového prostoru S mají stejnou velikost.
- Všechny báze afinního prostoru S mají stejnou velikost.

Pozorování

Nechť S je vektorový prostor a $B \subseteq S \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pak B je báze B právě tehdy, když $B \cup \{\mathbf{0}\}$ je báze afinního prostoru S.

Definice

- Dimenze vektorového prostoru je velikost jeho báze.
- Dimenze afinního prostoru je velikost jeho báze mínus jedna.
- Dimenze neprázdné množiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je dimenze afinního prostoru $\operatorname{aff}(S)$.

Carathéodory

Věta (Carathéodory)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Každý bod $v \in \text{conv}(M)$ lze zapsat jako konvexní kombinaci afinně nezávislých bodů z M.

Carathéodory

Věta (Carathéodory)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Každý bod $v \in \text{conv}(M)$ lze zapsat jako konvexní kombinaci afinně nezávislých bodů z M.

Důsledek

Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina dimenze S. Pak každý bod z $\text{conv}(S)$ lze vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše $d + 1$ bodů z S.

Pokračování

Pokud jsou tyto slajdy pro vás přínosné a chtěli byste pokračovat v dalších kapitolách, tak stačí přepnout do angličtiny.

`https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/teaching/optimization_methods/`