# Optimalizační metody

NOPT048

Jirka Fink

https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Letní semestr 2016/17

Poslední změna 12. dubna 2017

Přednášející: Martin Loebl

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé
- $A_{\star,j}$ značí $j$-tý sloupec matice $A$, kde $j \in \{1, \ldots, n\}$

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  max $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé
- $A_{\star,j}$ značí $j$-tý sloupec matice $A$, kde $j \in \{1, \dots, n\}$
- Báze $B$ je množina $m$ lineárně nezávislých sloupců matice $A$

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé
- $A_{\star,j}$ značí $j$-tý sloupec matice $A$, kde $j \in \{1, \ldots, n\}$
- Báze $B$ je množina $m$ lineárně nezávislých sloupců matice $A$
- $A_B$ značí bázické sloupce z $A$ a $\boldsymbol{x}_B$ značí bázické proměnné z $\boldsymbol{x}$

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé
- $A_{\star,j}$ značí $j$-tý sloupec matice $A$, kde $j \in \{1, \dots, n\}$
- Báze $B$ je množina $m$ lineárně nezávislých sloupců matice $A$
- $A_B$ značí bázické sloupce z $A$ a $\boldsymbol{x}_B$ značí bázické proměnné z $\boldsymbol{x}$
- $A_N$ značí zbývající (nebázické) sloupce a $\boldsymbol{x}_N$ značí nebázické proměnné

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé
- $A_{\star,j}$ značí $j$-tý sloupec matice $A$, kde $j \in \{1, \ldots, n\}$
- Báze $B$ je množina $m$ lineárně nezávislých sloupců matice $A$
- $A_B$ značí bázické sloupce z $A$ a $\boldsymbol{x}_B$ značí bázické proměnné z $\boldsymbol{x}$
- $A_N$ značí zbývající (nebázické) sloupce a $\boldsymbol{x}_N$ značí nebázické proměnné
- Platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N$ a $A\boldsymbol{x} = A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N$

# Opakování základních pojmů

- Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru:
  $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$
- Počet proměnných je $n$ a počet rovnic v systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je $m$
- Předpokládáme, že řádky matice $A$ jsou lineárně nezávislé
- $A_{\star,j}$ značí $j$-tý sloupec matice $A$, kde $j \in \{1, \dots, n\}$
- Báze $B$ je množina $m$ lineárně nezávislých sloupců matice $A$
- $A_B$ značí bázické sloupce z $A$ a $\boldsymbol{x}_B$ značí bázické proměnné z $\boldsymbol{x}$
- $A_N$ značí zbývající (nebázické) sloupce a $\boldsymbol{x}_N$ značí nebázické proměnné
- Platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N$ a $A\boldsymbol{x} = A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N$
- Řešení odpovídající bázi $B$ je $\boldsymbol{x}_N = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

# Obecná simplexová tabulka

## Definice

Simplexová tabulka daná přípustnou bází $B$ je systém $m+1$ lineárních rovnic proměnných $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ a $z$ taková, že množina všech přípustných řešení systému $m$ rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a cílové funkci $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ a v maticovém zápisu vypadá následovně.

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

kde $\boldsymbol{x}_B$ je vektor bázických proměnných, $\boldsymbol{x}_N$ je vektor nebázických proměnných, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $Q$ je matice typu $m \times (n-m)$ a $z_0 \in \mathbb{R}$.

# Obecná simplexová tabulka

## Definice

Simplexová tabulka daná přípustnou bází $B$ je systém $m+1$ lineárních rovnic proměnných $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ a $z$ taková, že množina všech přípustných řešení systému $m$ rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a cílové funkci $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ a v maticovém zápisu vypadá následovně.

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

kde $\boldsymbol{x}_B$ je vektor bázických proměnných, $\boldsymbol{x}_N$ je vektor nebázických proměnných, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $Q$ je matice typu $m \times (n-m)$ a $z_0 \in \mathbb{R}$.

## Příklad

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{x}_3 & = & 5 & + & \boldsymbol{x}_1 & - & \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_4 & = & 2 & - & \boldsymbol{x}_1 & & \\ \hline z & = & 3 & + & \boldsymbol{x}_1 & + & 2\boldsymbol{x}_2 \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = 3, \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} = (1, 2)$$

# Obecná simplexová tabulka

## Definice

Simplexová tabulka daná přípustnou bází $B$ je systém $m + 1$ lineárních rovnic proměnných $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ a $z$ taková, že množina všech přípustných řešení systému $m$ rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a cílové funkci $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ a v maticovém zápisu vypadá následovně.

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

kde $\boldsymbol{x}_B$ je vektor bázických proměnných, $\boldsymbol{x}_N$ je vektor nebázických proměnných, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $Q$ je matice typu $m \times (n - m)$ a $z_0 \in \mathbb{R}$.

# Obecná simplexová tabulka

## Definice

Simplexová tabulka daná přípustnou bází $B$ je systém $m + 1$ lineárních rovnic proměnných $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ a $z$ taková, že množina všech přípustných řešení systému $m$ rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a cílové funkci $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ a v maticovém zápisu vypadá následovně.

$$
\begin{array}{cccccc}
\boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\
\hline
z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N
\end{array}
$$

kde $\boldsymbol{x}_B$ je vektor bázických proměnných, $\boldsymbol{x}_N$ je vektor nebázických proměnných, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $Q$ je matice typu $m \times (n - m)$ a $z_0 \in \mathbb{R}$.

## Pozorování

Pro každou bázi existuje právě jedna simplexová tabulka:

- $Q = -A_B^{-1}A_N$
- $\boldsymbol{p} = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$
- $z_0 = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}\boldsymbol{b}$
- $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_N - (\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}A_B^{-1}A_N)^{\mathrm{T}}$

# Vlastnosti simplexové tabulky

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{rcccc}
\boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\
\hline
z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N
\end{array}$$

# Vlastnosti simplexové tabulky

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Báze $B$ je přípustná právě tehdy, když $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$.

# Vlastnosti simplexové tabulky

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Báze $B$ je přípustná právě tehdy, když $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$.

## Pozorování

Jestliže $\boldsymbol{r} \leq 0$, pak řešení odpovídající bázi $B$ je optimální.

# Vlastnosti simplexové tabulky

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Báze $B$ je přípustná právě tehdy, když $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$.

## Pozorování

Jestliže $\boldsymbol{r} \leq 0$, pak řešení odpovídající bázi $B$ je optimální.

## Idea kroku simplexové metody

Zvolme $v \in N$. Jak daleko můžeme jít po polopřímce $\boldsymbol{x}(t)$ pro $t \geq 0$, kde

- $\boldsymbol{x}_v(t) = t$
- $\boldsymbol{x}_{N \setminus \{v\}}(t) = \mathbf{0}$
- $\boldsymbol{x}_B(t) = \boldsymbol{p} + Q_{\star,v} t$,

abychom zůstali v přípustných bodech polyedru $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$?

# Vlastnosti simplexové tabulky

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Báze $B$ je přípustná právě tehdy, když $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{0}$.

## Pozorování

Jestliže $\boldsymbol{r} \leq 0$, pak řešení odpovídající bázi $B$ je optimální.

## Idea kroku simplexové metody

Zvolme $v \in N$. Jak daleko můžeme jít po polopřímce $\boldsymbol{x}(t)$ pro $t \geq 0$, kde

- $\boldsymbol{x}_v(t) = t$
- $\boldsymbol{x}_{N\setminus\{v\}}(t) = \mathbf{0}$
- $\boldsymbol{x}_B(t) = \boldsymbol{p} + Q_{\star,v}t$,

abychom zůstali v přípustných bodech polyedru $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$?

## Pozorování

Pokud existuje $v \in N$ takové, že $r_v > 0$ a $Q_{\star,v} \geq 0$, pak je úloha neomezená.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\
\hline
z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N
\end{array}
$$

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{rcccl} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Nalezení pivota

- Jestliže $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{0}$, pak máme optimální řešení

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\
\hline
z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N
\end{array}
$$

## Nalezení pivota

- Jestliže $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{0}$, pak máme optimální řešení
- Jinak vybereme libovolnou vstupní proměnnou $\boldsymbol{x}_v$ splňující $\boldsymbol{r}_v > 0$.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Nalezení pivota

- Jestliže $\boldsymbol{r} \leq \mathbf{0}$, pak máme optimální řešení
- Jinak vybereme libovolnou vstupní proměnnou $\boldsymbol{x}_v$ splňující $\boldsymbol{r}_v > 0$.
- Jestliže $Q_{\star,v} \geq \mathbf{0}$, pak je úloha neomezená.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Nalezení pivota

- Jestliže $\boldsymbol{r} \leq \mathbf{0}$, pak máme optimální řešení
- Jinak vybereme libovolnou vstupní proměnnou $\boldsymbol{x}_v$ splňující $\boldsymbol{r}_v > 0$.
- Jestliže $Q_{\star,v} \geq \mathbf{0}$, pak je úloha neomezená.
- Jinak vybereme výstupní proměnnou $\boldsymbol{x}_u$, která nejvíce omezuje vstupní proměnnou, t.j. $Q_{u,v} < 0$ a $-\frac{\boldsymbol{p}_u}{Q_{u,v}}$ je nejmenší.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Nalezení pivota

- Jestliže $\boldsymbol{r} \leq \mathbf{0}$, pak máme optimální řešení
- Jinak vybereme libovolnou vstupní proměnnou $\boldsymbol{x}_v$ splňující $\boldsymbol{r}_v > 0$.
- Jestliže $Q_{\star,v} \geq \mathbf{0}$, pak je úloha neomezená.
- Jinak vybereme výstupní proměnnou $\boldsymbol{x}_u$, která nejvíce omezuje vstupní proměnnou, t.j. $Q_{u,v} < 0$ a $-\frac{\boldsymbol{p}_u}{Q_{u,v}}$ je nejmenší.

## Úprava simplexové tabulky

Založená na Gaussově eliminaci.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Gaussova eliminace

- Nové bázické proměnné jsou $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ a nové nebázické proměnné jsou $(N \setminus \{v\}) \cup \{u\}$

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Gaussova eliminace

- Nové bázické proměnné jsou $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ a nové nebázické proměnné jsou $(N \setminus \{v\}) \cup \{u\}$
- Řádek $\boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{p}_u + Q_{u,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} Q_{u,j}\boldsymbol{x}_j$ je nahrazen
- řádkem $\boldsymbol{x}_v = \frac{\boldsymbol{p}_u}{-Q_{u,v}} + \frac{1}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} \frac{Q_{u,j}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_j$.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Gaussova eliminace

- Nové bázické proměnné jsou $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ a nové nebázické proměnné jsou $(N \setminus \{v\}) \cup \{u\}$
- Řádek $\boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{p}_u + Q_{u,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} Q_{u,j}\boldsymbol{x}_j$ je nahrazen
- řádkem $\boldsymbol{x}_v = \frac{\boldsymbol{p}_u}{-Q_{u,v}} + \frac{1}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} \frac{Q_{u,j}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_j$.
- Řádky $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}_i + Q_{i,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} Q_{i,j}\boldsymbol{x}_j$ pro $i \in B \setminus \{u\}$ jsou nahrazeny
- řádky $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{p}_i + \frac{Q_{i,v}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{p}_u) + \frac{Q_{i,v}}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} (Q_{i,j} + \frac{Q_{u,j}Q_{i,v}}{-Q_{u,v}})\boldsymbol{x}_j$.

# Krok simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Gaussova eliminace

- Nové bázické proměnné jsou $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ a nové nebázické proměnné jsou $(N \setminus \{v\}) \cup \{u\}$
- Řádek $\boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{p}_u + Q_{u,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N\setminus\{v\}} Q_{u,j}\boldsymbol{x}_j$ je nahrazen
- řádkem $\boldsymbol{x}_v = \frac{\boldsymbol{p}_u}{-Q_{u,v}} + \frac{1}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N\setminus\{v\}} \frac{Q_{u,j}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_j$.
- Řádky $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}_i + Q_{i,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N\setminus\{v\}} Q_{i,j}\boldsymbol{x}_j$ pro $i \in B \setminus \{u\}$ jsou nahrazeny
- řádky $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{p}_i + \frac{Q_{i,v}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{p}_u) + \frac{Q_{i,v}}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N\setminus\{v\}}(Q_{i,j} + \frac{Q_{u,j}Q_{i,v}}{-Q_{u,v}})\boldsymbol{x}_j$.
- Cílová funkce $z = z_0 + \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N\setminus\{v\}} \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{x}_j$ je nahrazena
- cílovou funkcí $z = (z_0 + \frac{\boldsymbol{p}_u}{-Q_{u,v}}) + \frac{\boldsymbol{r}_v}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N\setminus\{v\}}(\boldsymbol{r}_j + \frac{\boldsymbol{r}_v Q_{i,v}}{-Q_{u,v}})\boldsymbol{x}_j$.

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Gaussova eliminace

- Nové bázické proměnné jsou $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ a nové nebázické proměnné jsou $(N \setminus \{v\}) \cup \{u\}$
- Řádek $\boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{p}_u + Q_{u,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} Q_{u,j}\boldsymbol{x}_j$ je nahrazen
- řádkem $\boldsymbol{x}_v = \frac{\boldsymbol{p}_u}{-Q_{u,v}} + \frac{1}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} \frac{Q_{u,j}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_j$.
- Řádky $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{p}_i + Q_{i,v}\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} Q_{i,j}\boldsymbol{x}_j$ pro $i \in B \setminus \{u\}$ jsou nahrazeny
- řádky $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{p}_i + \frac{Q_{i,v}}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{p}_u) + \frac{Q_{i,v}}{Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} (Q_{i,j} + \frac{Q_{u,j}Q_{i,v}}{-Q_{u,v}})\boldsymbol{x}_j$.
- Cílová funkce $z = z_0 + \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{x}_v + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{x}_j$ je nahrazena
- cílovou funkcí $z = (z_0 + \frac{\boldsymbol{p}_u}{-Q_{u,v}}) + \frac{\boldsymbol{r}_v}{-Q_{u,v}}\boldsymbol{x}_u + \sum_{j \in N \setminus \{v\}} (\boldsymbol{r}_j + \frac{\boldsymbol{r}_v Q_{i,v}}{-Q_{u,v}})\boldsymbol{x}_j$.

## Pozorování

Krok simplexové metody nemění množinu přípustných řešení.

# Konečnost simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Nechť $B$ je báze s řešením $\boldsymbol{x}'$ a nechť $\bar{B}$ je nová báze s řešením $\bar{x}$ po jednom kroku simplexové metody. Pak platí $\boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}$ nebo $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' < \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}$.

# Konečnost simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{rcrcl} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Nechť $B$ je báze s řešením $\boldsymbol{x}'$ a nechť $\bar{B}$ je nová báze s řešením $\bar{x}$ po jednom kroku simplexové metody. Pak platí $\boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}$ nebo $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' < \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}$.

## Pozorování

Pokud se simplexová metoda zacyklí, pak bázím vyskytujícím se v cyklu odpovídá stejný vrchol.

# Konečnost simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Nechť $B$ je báze s řešením $\boldsymbol{x}'$ a nechť $\bar{B}$ je nová báze s řešením $\bar{x}$ po jednom kroku simplexové metody. Pak platí $\boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}$ nebo $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' < \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}$.

## Pozorování

Pokud se simplexová metoda zacyklí, pak bázím vyskytujícím se v cyklu odpovídá stejný vrchol.

## Blandovo pravidlo

Pokud máme pro volbu vstupní nebo výstupní proměnné více možností, pak volíme proměnnou s nejmenším indexem ze všech proměnných připadajících v úvahu.

# Konečnost simplexové metody

## Obecná simplexová tabulka

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} & + & Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

## Pozorování

Nechť $B$ je báze s řešením $\boldsymbol{x}'$ a nechť $\bar{B}$ je nová báze s řešením $\bar{x}$ po jednom kroku simplexové metody. Pak platí $\boldsymbol{x}' = \bar{\boldsymbol{x}}$ nebo $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' < \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}$.

## Pozorování

Pokud se simplexová metoda zacyklí, pak bázím vyskytujícím se v cyklu odpovídá stejný vrchol.

## Blandovo pravidlo

Pokud máme pro volbu vstupní nebo výstupní proměnné více možností, pak volíme proměnnou s nejmenším indexem ze všech proměnných připadajících v úvahu.

## Věta

Simplexová metoda s Blandovým pravidlem vždy skončí.

# Nalezení počáteční přípustné báze

## Úloha v rovnicovém tvaru

- Maximalizace $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq 0$.
- Předpokládáme, že $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ (rovnice se zápornou pravou stranou vynásobíme $-1$).

# Nalezení počáteční přípustné báze

## Úloha v rovnicovém tvaru

- Maximalizace $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq 0$.
- Předpokládáme, že $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ (rovnice se zápornou pravou stranou vynásobíme $-1$).

## Pomocná úloha

Přidáním pomocných proměnných $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ získáme pomocnou úlohu maximalizace $-\boldsymbol{y}_1 - \cdots - \boldsymbol{y}_m$ za podmínek $A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

# Nalezení počáteční přípustné báze

## Úloha v rovnicovém tvaru

- Maximalizace $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq 0$.
- Předpokládáme, že $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ (rovnice se zápornou pravou stranou vynásobíme $-1$).

## Pomocná úloha

Přidáním pomocných proměnných $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ získáme pomocnou úlohu maximalizace $-\boldsymbol{y}_1 - \cdots - \boldsymbol{y}_m$ za podmínek $A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

## Pozorování

Počáteční přípustná báze pomocné úlohy je $B = \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ s počáteční tabulkou

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{y} & = & \boldsymbol{b} & - & A\boldsymbol{x} \\ \hline z & = & -\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} & + & (\mathbf{1}^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x} \end{array}$$

# Nalezení počáteční přípustné báze

## Úloha v rovnicovém tvaru

- Maximalizace $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq 0$.
- Předpokládáme, že $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ (rovnice se zápornou pravou stranou vynásobíme $-1$).

## Pomocná úloha

Přidáním pomocných proměnných $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ získáme pomocnou úlohu maximalizace $-\boldsymbol{y}_1 - \cdots - \boldsymbol{y}_m$ za podmínek $A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

## Pozorování

Počáteční přípustná báze pomocné úlohy je $B = \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ s počáteční tabulkou

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{y} & = & \boldsymbol{b} & - & A\boldsymbol{x} \\
\hline
z & = & -\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} & + & (\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}
\end{array}$$

## Pozorování

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. Původní úloha $\max\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\right\}$ má přípustné řešení.
2. Optimální hodnota cílové funkce pomocné úlohy je 0.
3. Pomocná úloha má přípustné řešení splňující $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & 2\boldsymbol{x}_1 & + & 3\boldsymbol{x}_2 & & \\
\text{za podmínek} & 4\boldsymbol{x}_1 & + & 8\boldsymbol{x}_2 & \leq & 12 \\
 & 2\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 3 \\
 & 3\boldsymbol{x}_1 & + & 2\boldsymbol{x}_2 & \leq & 4 \\
 & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{za podmínek} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

## Triviální odhady

- $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximalizovat} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{za podmínek} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

## Triviální odhady

- $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$
- $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & 2\boldsymbol{x}_1 & + & 3\boldsymbol{x}_2 & & \\
\text{za podmínek} & 4\boldsymbol{x}_1 & + & 8\boldsymbol{x}_2 & \leq & 12 \\
 & 2\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 3 \\
 & 3\boldsymbol{x}_1 & + & 2\boldsymbol{x}_2 & \leq & 4 \\
 & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

## Triviální odhady

- $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \leq 4\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2 \leq 12$
- $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \leq \frac{1}{2}(4\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2) \leq 6$
- $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{3}(4\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \leq 5$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & 2\boldsymbol{x}_1 & + & 3\boldsymbol{x}_2 & & \\
\text{za podmínek} & 4\boldsymbol{x}_1 & + & 8\boldsymbol{x}_2 & \leq & 12 \\
 & 2\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 3 \\
 & 3\boldsymbol{x}_1 & + & 2\boldsymbol{x}_2 & \leq & 4 \\
 & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

## Triviální odhady

- $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \leq 4\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2 \leq 12$
- $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \leq \frac{1}{2}(4\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2) \leq 6$
- $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{3}(4\boldsymbol{x}_1 + 8\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \leq 5$

## Jak najít nejlepší kombinaci podmínek?

Každá nezáporná lineární kombinace podmínek dávající nerovnost $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{x}_2 \leq h$ s $d_1 \geq 2$ a $d_2 \geq 3$ dává horní odhad $2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{x}_2 \leq h$.

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{za podmínek} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximalizovat} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{za podmínek} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

## Uvažujme nezáporné kombinace podmínek s koeficienty $y_1$, $y_2$ a $y_3$

$(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$ kde

- $d_1 = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$
- $d_2 = 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximalizovat} & 2\boldsymbol{x}_1 & + & 3\boldsymbol{x}_2 & & \\ \text{za podmínek} & 4\boldsymbol{x}_1 & + & 8\boldsymbol{x}_2 & \leq & 12 \\ & 2\boldsymbol{x}_1 & + & \boldsymbol{x}_2 & \leq & 3 \\ & 3\boldsymbol{x}_1 & + & 2\boldsymbol{x}_2 & \leq & 4 \\ & & & \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 & \geq & 0 \end{array}$$

## Uvažujme nezáporné kombinace podmínek s koeficienty $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ a $\boldsymbol{y}_3$

$(4\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{y}_3)\boldsymbol{x}_1 + (8\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + 2\boldsymbol{y}_3)\boldsymbol{x}_2 \leq 12\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_2 + 4\boldsymbol{y}_3$ kde

- $\boldsymbol{d}_1 = 4\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{y}_3 \geq 2$
- $\boldsymbol{d}_2 = 8\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + 2\boldsymbol{y}_3 \geq 3$
- a minimalizujme $h = 12\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + 4\boldsymbol{y}_3$

# Dualita lineárního programování: Příklad

## Zkusme najít horní odhad optimální hodnoty cílové funkce

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximalizovat} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{za podmínek} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

## Uvažujme nezáporné kombinace podmínek s koeficienty $y_1$, $y_2$ a $y_3$

$(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$ kde

- $d_1 = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$
- $d_2 = 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$
- a minimalizujme $h = 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$

## Duální úloha

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Minimalizovat} & 12y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & & \\
\text{za podmínek} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 \\
 & 8y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 3 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

# Dualita lineárního programování: Obecně

## Primární úloha

Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

# Dualita lineárního programování: Obecně

## Primární úloha

Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

## Duální úloha

Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

# Dualita lineárního programování: Obecně

## Primární úloha

Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

## Duální úloha

Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

## Slabá věta o dualitě

Pro každé primární přípustné řešení $\boldsymbol{x}$ a každé duální přípustné řešení $\boldsymbol{y}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

# Dualita lineárního programování: Obecně

## Primární úloha

Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

## Duální úloha

Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

## Slabá věta o dualitě

Pro každé primární přípustné řešení $\boldsymbol{x}$ a každé duální přípustné řešení $\boldsymbol{y}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

## Důsledek

Pokud je jedna úloha neomezená, pak druhá úloha je nepřípustná.

# Dualita lineárního programování: Obecně

## Primární úloha

Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

## Duální úloha

Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

## Slabá věta o dualitě

Pro každé primární přípustné řešení $\boldsymbol{x}$ a každé duální přípustné řešení $\boldsymbol{y}$ platí $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

## Důsledek

Pokud je jedna úloha neomezená, pak druhá úloha je nepřípustná.

## Silná věta o dualitě

Vždy nastane právě jedna z následujících možností

1. Primární ani duální úloha nemá přípustné řešení
2. Primární úloha je neomezená a duální je nepřípustná
3. Primární úloha je nepřípustná a duální je neomezená
4. Existují přípustná řešení $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ splňující $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

# Dualizace

**Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například**

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Najděme duální úlohu

# Dualizace

**Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například**

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Ekvivalentní úloha

# Dualizace

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha

# Dualizace

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $-A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- Minimalizovat $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ — Elegantnější formulace

# Dualizace

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ — Duální úloha
- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}$ — Elegantnější formulace

## Duální úloha k duální úloze je původní úloha

- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ — Duální úloha

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ — Duální úloha
- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}$ — Elegantnější formulace

## Duální úloha k duální úloze je původní úloha

- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ — Duální úloha
- -Maximalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ — Ekvivalentní úloha k duálu

# Dualizace

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{0}$ — Elegantnější formulace

## Duální úloha k duální úloze je původní úloha

- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- -Maximalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha k duálu
- -Minimalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ — Duální úloha k duální úloze

# Dualizace

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{0}$ — Elegantnější formulace

## Duální úloha k duální úloze je původní úloha

- Minimalizovat $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- -Maximalizovat $-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha k duálu
- -Minimalizovat $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ — Duální úloha k duální úloze
- -Minimalizovat $-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ za podmínek $-A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní formulace

# Dualizace

## Pro každou úlohy lineárního programování existuje duální úloha, například

- Maximalizovat $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — Najděme duální úlohu
- Maximalizovat $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $-A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha
- Minimalizovat $-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ za podmínek $-A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- Minimalizovat $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ — Elegantnější formulace

## Duální úloha k duální úloze je původní úloha

- Minimalizovat $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ — Duální úloha
- -Maximalizovat $-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ za podmínek $A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní úloha k duálu
- -Minimalizovat $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ — Duální úloha k duální úloze
- -Minimalizovat $-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $-A\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — Ekvivalentní formulace
- Maximalizovat $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — Původní primární úloha

# Fourier–Motzkin eliminace: příklad

## Cíl: najít přípustné řešení následující soustavy

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & - & 6y & + & 3z & \leq & 9 \\
5x & + & 10y & - & z & \leq & 15 \\
-x & + & 5y & - & 2z & \leq & -7 \\
-3x & + & 2y & + & 6z & \leq & 12
\end{array}
$$

# Fourier–Motzkin eliminace: příklad

## Cíl: najít přípustné řešení následující soustavy

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & - & 6y & + & 3z & \leq & 9 \\
5x & + & 10y & - & z & \leq & 15 \\
-x & + & 5y & - & 2z & \leq & -7 \\
-3x & + & 2y & + & 6z & \leq & 12
\end{array}
$$

## Vyjádříme proměnnou $x$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
x & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
x & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
x & \geq & 7 & + & 5y & - & 2z \\
x & \geq & -4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z
\end{array}
$$

# Fourier–Motzkin eliminace: příklad

## Cíl: najít přípustné řešení následující soustavy

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & 5y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & - & 6y & + & 3z & \leq & 9 \\
5x & + & 10y & - & z & \leq & 15 \\
-x & + & 5y & - & 2z & \leq & -7 \\
-3x & + & 2y & + & 6z & \leq & 12
\end{array}
$$

## Vyjádříme proměnnou $x$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
x & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
x & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
x & \geq & 7 & + & 5y & - & 2z \\
x & \geq & -4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z
\end{array}
$$

## Eliminujeme proměnnou $x$

Původní systém má přípustné řešení právě tehdy, když existuje $y$ a $z$ splňující

$$
\max\left\{7 + 5y - 2z, -4 + \frac{2}{3}y + 2z\right\} \leq \min\left\{5 + \frac{5}{2}y - 2z, 3 + 2y - z, 3 - 2y + \frac{1}{5}z\right\}
$$

# Fourier–Motzkin eliminace: příklad

## Podmínku přepíšeme do soustavy

Reálná čísla $y$ a $z$ splňují
$\max\left\{7+5y-2z, -4+\frac{2}{3}y+2z\right\} \leq \min\left\{5+\frac{5}{2}y-2z, 3+2y-z, 3-2y+\frac{1}{5}z\right\}$
právě tehdy, když splňují

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 3 & + & 2y & - & z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \leq & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z
\end{array}$$

# Fourier–Motzkin eliminace: příklad

## Podmínku přepíšeme do soustavy

Reálná čísla $y$ a $z$ splňují
$\max\left\{7+5y-2z, -4+\frac{2}{3}y+2z\right\} \le \min\left\{5+\frac{5}{2}y-2z, 3+2y-z, 3-2y+\frac{1}{5}z\right\}$
právě tehdy, když splňují

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
7 & + & 5y & - & 2z & \le & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \le & 3 & + & 2y & - & z \\
7 & + & 5y & - & 2z & \le & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \le & 5 & + & \frac{5}{2}y & - & 2z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \le & 3 & + & 2y & - & z \\
-4 & + & \frac{2}{3}y & + & 2z & \le & 3 & - & 2y & + & \frac{1}{5}z
\end{array}$$

## Přehled

- Eliminujeme proměnnou $y$, najdeme přípustné ohodnocení $z$ a dopočítame $y$ a $x$.
- V každém kroku eliminujeme jednu proměnnou, ale počet podmínek může kvadraticky vzrůst.
- Začneme-li s $m$ podmínkami, pak po eliminaci $n$ proměnných můžeme počet podmínek vzrůst až na $4(m/4)^{2^n}$.

# Fourier–Motzkin eliminace: obecně

## Věta

Nechť $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je systém s $n \geq 1$ proměnnými a $m$ nerovnostmi. Pak existuje systém $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ s $n-1$ proměnnými a nejvýše $\max\left\{m, m^2/4\right\}$ nerovnostmi s následujícími vlastnostmi.

1. $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, když $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ má řešení.
2. Každá nerovnost $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ je nezáporná lineární kombinace nerovností $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$.

## Důkaz (přehled)

1. BÚNO: $A_{i,1} \in \{-1, 0, 1\}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$
2. Označme $C = \{i;\ A_{i,1} = 1\}$, $F = \{i;\ A_{i,1} = -1\}$ a $L = \{i;\ A_{i,1} = 0\}$
3. Nechť $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ je následující systém $n-1$ proměnných a $|C| \cdot |F| + |L|$.

$$\begin{array}{lrcll} j \in C, k \in F: & (A_{j,\star} + A_{k,\star})\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{b}_k & (1) \\ l \in L: & A_{l,\star}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b}_l & (2) \end{array}$$

4. Jestliže $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ má řešení $\boldsymbol{x}'$, pak najdeme řešení $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}')$ soustavy $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$:
   - (1) je ekvivaletní $A'_{k,\star}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}_k \leq \boldsymbol{b}_j - A'_{j,\star}\boldsymbol{x}'$ pro všechna $j \in C, k \in F$,
   - což je ekvivalentní $\max_{k \in F}\left\{A'_{k,\star}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}_k\right\} \leq \min_{j \in C}\left\{\boldsymbol{b}_j - A'_{j,\star}\boldsymbol{x}'\right\}$.
   - Zvolíme $\boldsymbol{x}_1$ mezi $\max_{k \in F}\left\{A'_{k,\star}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}_k\right\}$ a $\min_{j \in C}\left\{\boldsymbol{b}_j - A'_{j,\star}\boldsymbol{x}'\right\}$ libovolně.

## Farkas lemma

Nechť $A \in R^{m \times n}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Pak systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^\mathrm{T} A = \mathbf{0}^\mathrm{T}$ platí $\boldsymbol{y}^\mathrm{T}\boldsymbol{b} \geq 0$.

## Farkas lemma

Nechť $A \in R^{m \times n}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Pak systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \geq 0$.

## Důkaz (přehled)

$\Rightarrow$ Jesliže $\boldsymbol{x}$ splňuje $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ splňuje $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$, pak $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\Leftarrow$ Jesliže $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ nemá řešení, pak indukcí podle $n$ najdeme $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} < 0$

$n = 0$
- Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ je systémem $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{b}$, který je nepřípustný, a proto $b_i < 0$ pro nějaké $i$
- Zvolíme $\boldsymbol{y} = e_i$ ($i$-tý jednotkový vektor)

$n > 0$
- Pomocí Fourier–Motzkin eliminace získáme nepřípustný systém $A'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$
- Existuje nezáporná matice $M$ splňující $(\mathbf{0}|A') = MA$ a $\boldsymbol{b}' = M\boldsymbol{b}$
- Indukcí najdeme $\boldsymbol{y}' \geq 0$ splňující $\boldsymbol{y}'^{\mathrm{T}} A' = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{y}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}' < 0$
- Ověříme, že $\boldsymbol{y} = M^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}'$ splňuje všechny požadavky

  $\boldsymbol{y} = M^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}' \geq \mathbf{0}$

  $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = (M^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}')^{\mathrm{T}} A = \boldsymbol{y}'^{\mathrm{T}} MA = \boldsymbol{y}'^{\mathrm{T}} (\mathbf{0}|A') = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$

  $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} = (M^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}'^{\mathrm{T}} M\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}' < \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$

# Farkas lemma: Různé varianty

## Věta

Pro $A \in R^{m \times n}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ platí následující tvrzení.

1. Systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.
2. Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.
3. Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.

# Farkas lemma: Různé varianty

## Věta

Pro $A \in R^{m \times n}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ platí následující tvrzení.

1. Systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.
2. Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.
3. Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.

## Uvedená tvrzení jsou ekvivalentní

Cvičení :)

## Kužel

Kužel generovaný vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ je množina všechna nezáporných kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

# Farkas lemma: Geometricky

## Kužel

Kužel generovaný vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ je množina všechna nezáporných kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

## Farkas lemma: Geometricky

Pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ nastane právě jedna z následujících možností.

- $\boldsymbol{b}$ leží v kuželu generovaným $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, tj. pro nějaký nezáporný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}_i$.
- $\boldsymbol{b}$ lze od kuželu generovaným $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ oddělit nadrovinou, tj. pro nějaký vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ platí $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq 0$ a $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$.

# Farkas lemma: Geometricky

## Kužel

Kužel generovaný vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ je množina všechna nezáporných kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

## Farkas lemma: Geometricky

Pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ nastane právě jedna z následujících možností.

- $\boldsymbol{b}$ leží v kuželu generovaným $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, tj. pro nějaký nezáporný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}_i$.
- $\boldsymbol{b}$ lze od kuželu generovaným $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ oddělit nadrovinou, tj. pro nějaký vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ platí $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq 0$ a $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$.

## Farkas lemma: Maticově

Nechť $A \in R^{m \times n}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.

## Věta o oddělitelnosti konvexních množin (striktní verze)

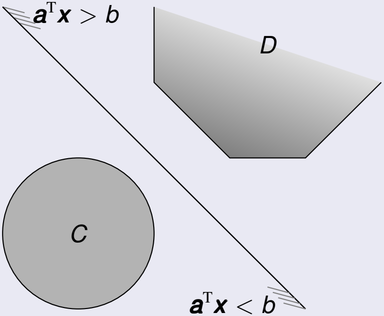
Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní, disjunktní množiny a $C$ je omezená. Pak existuje nadrovina $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ ostře oddělující $C$ a $D$, tj. $C \subseteq \left\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b\right\}$ a $D \subseteq \left\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b\right\}$.

# Věta o oddělitelnosti konvexních množin

## Věta o oddělitelnosti konvexních množin (striktní verze)

Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní, disjunktní množiny a $C$ je omezená. Pak existuje nadrovina $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ ostře oddělující $C$ a $D$, tj. $C \subseteq \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b\}$.

## Příklad



## Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *uzavřená*, jestliže $S$ obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti bodů z $S$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *omezená*, jestliže $\max\{||\boldsymbol{x}||;\ \boldsymbol{x} \in S\} < b$ pro libovolné $b \in \mathbb{R}$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *kompaktní*, jestliže každá posloupnost bodů z $S$ obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v $S$.

## Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *uzavřená*, jestliže $S$ obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti bodů z $S$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *omezená*, jestliže $\max\{||\boldsymbol{x}||;\ \boldsymbol{x} \in S\} < b$ pro libovolné $b \in \mathbb{R}$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *kompaktní*, jestliže každá posloupnost bodů z $S$ obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v $S$.

## Věta

Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když $S$ je uzavřená a omezená.

## Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *uzavřená*, jestliže $S$ obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti bodů z $S$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *omezená*, jestliže $\max\left\{||\boldsymbol{x}||;\ \boldsymbol{x} \in S\right\} < b$ pro libovolné $b \in \mathbb{R}$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *kompaktní*, jestliže každá posloupnost bodů z $S$ obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v $S$.

## Věta

Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když $S$ je uzavřená a omezená.

## Věta

Jestliže $f : S \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na kompaktní množině $S \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $S$ obsahuje bod $\boldsymbol{x}$ maximalizující $f$ na $S$, tj. $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{y})$ pro všechna $\boldsymbol{y} \in S$.

# Opakování matematické analýzy

## Definice

- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *uzavřená*, jestliže $S$ obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti bodů z $S$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *omezená*, jestliže $\max \{||\boldsymbol{x}||;\ \boldsymbol{x} \in S\} < b$ pro libovolné $b \in \mathbb{R}$.
- Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is *kompaktní*, jestliže každá posloupnost bodů z $S$ obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v $S$.

## Věta

Množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když $S$ je uzavřená a omezená.

## Věta

Jestliže $f : S \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na kompaktní množině $S \subseteq \mathbb{R}^n$, pak $S$ obsahuje bod $\boldsymbol{x}$ maximalizující $f$ na $S$, tj. $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{y})$ pro všechna $\boldsymbol{y} \in S$.

## Infimum a supremum

- Infimum množiny $S \subseteq \mathbb{R}$ je $\inf(S) = \max \{b \in \mathbb{R};\ b \leq x\ \forall x \in S\}$.
- Supremum množiny $S \subseteq \mathbb{R}$ je $\sup(S) = \min \{b \in \mathbb{R};\ b \geq x\ \forall x \in S\}$.
- $\inf(\emptyset) = \infty$ a $\sup(\emptyset) = -\infty$
- $\inf(S) = -\infty$ jestliže $S$ je zdola neomezená

# Věta o oddělitelnosti konvexních množin

## Věta o oddělitelnosti konvexních množin (striktní verze)

Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní, disjunktní množiny a $C$ je omezená. Pak existuje nadrovina $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ ostře oddělující $C$ a $D$, tj. $C \subseteq \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b\}$.

# Věta o oddělitelnosti konvexních množin

## Věta o oddělitelnosti konvexních množin (striktní verze)

Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní, disjunktní množiny a $C$ je omezená. Pak existuje nadrovina $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ ostře oddělující $C$ a $D$, tj. $C \subseteq \left\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b\right\}$ a $D \subseteq \left\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b\right\}$.

## Důkaz (přehled)

1. Najdeme $\boldsymbol{c} \in C$ a $\boldsymbol{d} \in D$ s nejmenší vzdáleností $||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||$:
    1. Nechť $m = \inf\{||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||;\ \boldsymbol{c} \in C, \boldsymbol{d} \in D\}$.
    2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\boldsymbol{c}_n \in C$ a $\boldsymbol{d}_n \in D$ takové, že $||\boldsymbol{d}_n - \boldsymbol{c}_n|| \leq m + \frac{1}{n}$.
    3. Protože $C$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\left\{\boldsymbol{c}_{k_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k $\boldsymbol{c} \in C$.
    4. Existuje $z \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vzdálenost $||\boldsymbol{d}_n - \boldsymbol{c}||$ je nejvýše $z$.
    5. Protože $D \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}|| \leq z\}$ je kompaktní, posloupnost $\left\{\boldsymbol{d}_{k_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má podposloupnost $\left\{\boldsymbol{d}_{l_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k $\boldsymbol{d} \in D$.
    6. Zbývá ověřit, že jsme našli hledané body $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ se vzdáleností $m$.

## Věta o oddělitelnosti konvexních množin (striktní verze)

Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní, disjunktní množiny a $C$ je omezená. Pak existuje nadrovina $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ ostře oddělující $C$ a $D$, tj. $C \subseteq \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b\}$.

## Důkaz (přehled)

1. Najdeme $\boldsymbol{c} \in C$ a $\boldsymbol{d} \in D$ s nejmenší vzdáleností $||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||$:
   1. Nechť $m = \inf \{||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||;\ \boldsymbol{c} \in C, \boldsymbol{d} \in D\}$.
   2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\boldsymbol{c}_n \in C$ a $\boldsymbol{d}_n \in D$ takové, že $||\boldsymbol{d}_n - \boldsymbol{c}_n|| \leq m + \frac{1}{n}$.
   3. Protože $C$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{\boldsymbol{c}_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k $\boldsymbol{c} \in C$.
   4. Existuje $z \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vzdálenost $||\boldsymbol{d}_n - \boldsymbol{c}||$ je nejvýše $z$.
   5. Protože $D \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}|| \leq z\}$ je kompaktní, posloupnost $\{\boldsymbol{d}_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ má podposloupnost $\{\boldsymbol{d}_{l_n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k $\boldsymbol{d} \in D$.
   6. Zbývá ověřit, že jsme našli hledané body $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ se vzdáleností $m$.
2. Hledaná nadrovina je $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$, kde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}$ a $b = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}}{2}$.
   1. Ověříme, že platí $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}' \leq \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} < b < \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}'$ pro všechna $\boldsymbol{c}' \in C$ a $\boldsymbol{d}' \in D$.
   2. Protože $C$ je konvexní, $y = \boldsymbol{c} + \alpha(\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}) \in C$ pro všechna $0 \leq \alpha \leq 1$.
   3. Z minimality vzdálenosti $||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||$ plyne $||\boldsymbol{d} - y||^2 \geq ||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||^2$.
   4. Elementárními úpravami získame $\frac{\alpha}{2}||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}||^2 + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}'$,
   5. což platí pro libovolně malé $\alpha > 0$, a proto $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}'$.

# Souvislost Farkas lemma, duality a lineárního programování

## Farkas lemma

Systém $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \ge 0$.

## Přípustnost úlohy lineárního programování

Úloha $\max\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\right\}$ je nepřípustná právě tehdy, když existuje nezáporná kombinace $\boldsymbol{y}$ podmínek $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ taková, že $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0$.

# Souvislost Farkas lemma, duality a lineárního programování

## Farkas lemma

Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^\mathrm{T} A = \boldsymbol{0}^\mathrm{T}$ platí $\boldsymbol{y}^\mathrm{T}\boldsymbol{b} \geq 0$.

## Přípustnost úlohy lineárního programování

Úloha $\max\left\{\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ je nepřípustná právě tehdy, když existuje nezáporná kombinace $\boldsymbol{y}$ podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ taková, že $\boldsymbol{y}^\mathrm{T} A = \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{y}^\mathrm{T}\boldsymbol{b} < 0$.

## Omezenost úlohy lineárního programování

- Jestliže úloha $\max\left\{\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ je omezená a přípustná, pak $\boldsymbol{c}$ lze získat jako nezápornou kombinaci $\boldsymbol{y}$ řádků matice $A$, tj. $\boldsymbol{c}^\mathrm{T} = \boldsymbol{y}^\mathrm{T} A$.
- Jestliže existuje nezáporné $\boldsymbol{y}$ splňující $\boldsymbol{c}^\mathrm{T} = \boldsymbol{y}^\mathrm{T} A$, pak je úlola $\max\left\{\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ je omezená.

# Souvislost Farkas lemma, duality a lineárního programování

## Farkas lemma

Systém $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ má řešení $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když pro každé nezáporné $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ platí $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$.

## Přípustnost úlohy lineárního programování

Úloha $\max\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ je nepřípustná právě tehdy, když existuje nezáporná kombinace $\boldsymbol{y}$ podmínek $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ taková, že $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0$.

## Omezenost úlohy lineárního programování

- Jestliže úloha $\max\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ je omezená a přípustná, pak $\boldsymbol{c}$ lze získat jako nezápornou kombinaci $\boldsymbol{y}$ řádků matice $A$, tj. $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A$.
- Jestliže existuje nezáporné $\boldsymbol{y}$ splňující $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A$, pak je úlola $\max\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\}$ je omezená.

## Farkas lemma plyne z duality

$$\max\left\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\right\} = \min\left\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\ A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}\right\}$$