

# 3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD

Do třetice všeho dobrého a lineárního

PŘÍKLAD PRVNÍ  
kupř. tento:

**Část 1.** Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti,

$$5x + 3y \leq 8$$

$$2x - 5z < -3$$

$$6x + 5y + 2w = 5$$

$$3z + 2w > 5$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

Jak pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

**Část 2.** Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

**Část 3.** Kdy tedy můžeme řešit LP s ostrými nerovnostmi?

PŘÍKLAD DRUHÝ Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

A jak by mohlo vypadat ILP, které spočítá barevnost grafu (tj. minimální  $k$  takové, že je graf  $k$  obarvitelný)?

PŘÍKLAD TŘETÍ Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

*Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf  $G = (V, E, f)$ , kde  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu  $uv$  máme proměnnou  $x_{uv} \in \{0, 1\}$ , cílová funkce je  $\min \sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$  a pro každý vrchol  $u$  máme podmínku  $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$ .“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Kocourkovští radní se rozhodli, že přilepší obecnímu rozpočtu pomocí automatizovaného systému kontroly dodržování maximální povolené rychlosti na městských komunikacích. Měřicí systém bude instalován na křižovatkách. Pro jeho správnou funkčnost je třeba aby každý úsek ulice mezi dvěma křižovatkami měl alespoň jednu z koncových křižovatek pokrytou. Dodavatel si účtuje fixní poplatek za každou křižovátku, na kterou bude systém nainstalován.

Zformulujte celočíselný lineární program, který umožní Kocourkovským radním optimálně naplánovat rozmístění měřicího systému.

PŘÍKLAD PÁTÝ Díky navýšení městského rozpočtu plánují Kocourkovští radní tento víkend uspořádat festival představující volnočasové aktivity dostupné občanům (spolek dobrovolných hasičů, městská dechová hudba, vodácký oddíl, ...). Kvůli pestrosti festivalu chtějí radní, aby probíhalo co nejvíce akcí zároveň. Musí se ale vypořádat s tím, že Kocourkovští jsou velice aktivní. Mnozí organizátoři jsou důležití pro několik jednotlivých akcí a ty proto nemůžou proběhnout naráz. Radní dostali seznamy organizátorů jednotlivých akcí a vědí tedy, které akce jsou spolu v konfliktu.

Zformulujte celočíselný lineární program pro naplánování co nejnabitějšího festivalu.