4. CVIČENÍ Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD

Linearita, afinita, konvexita … prostě geometrie

D: *Afinní prostor* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna $\dim L$.

D: *Afinní kombinace* vektorů $v_1, v_2, \dots v_n$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, kde α_i splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

D: Množina vektorů V je *afinně závislá*, pokud existuje $v \in V$ takový, že ho lze vyjádřit jako afinní kombinaci ostatních vektorů z V.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Platí, že každou nadrovinu lze vyjádřit jako $\{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = b\}$, kde $c \in \mathbb{R}^d$ a $b \in \mathbb{R}$. Zároveň každá rovnice $c^T x = b$ pro $c \neq o$ určuje nadrovinu.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva (uzavřené) *poloprostory*.

T: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Cx = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

Příklad první

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + v$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor v. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $A = L + v$ pro nějaký vektor v. Jinak řečeno, dokažte, že pokud existují dvě dvojice (L_1, v_1) a (L_2, v_2) takové, že $L_1 + v_1 = AL_2 + v_2$, pak nutně $L_1 = L_2$.

Charakterizujte všechny vektory v, které posunou lineární prostor L na afinní prostor A.

Příklad druhý

Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n+1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ je afinně nezávislá právě tehdy, když množina n vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \dots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

Hint: Zaměřte se na afinní závislost.

Příklad třetí

Rozhodněte, zda $U = V$ pro afinní prostory U, V definované takto:

$$U = (1,0,0)^T + \operatorname{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\},$$

$$V = (2,-1,-1)^T + \operatorname{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\}\,.$$

Příklad čtvrtý

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru $\mathbb{R}^4$?
2. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?