5. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Konvexita a podobné krásy geometrie

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice $c^T x = b$.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K.

D: Vektor x je *konvexní kombinací* množiny vektorů $a_1, a_2, \dots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0,1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *v konvexní poloze* („konvexně nezávislá“), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

D: *Konvexní obal* $\mathrm{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x \mid Ax \le b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \le t$ a zároveň $\exists x \in P : c^T x = t$, označíme $\{x \mid c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze $d-1$ nazýváme *fasety*.

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\mathrm{conv}(0, (0,0,\dots,0,1), (0,0,\dots,1,0), \dots, (1,0,\dots,0,0))$$

Příklad první Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného LP zadaného například takto:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$$

je konvexní množina.

Příklad druhý Víme, že v $\mathbb{R}^d$ je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d+1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v $\mathbb{R}^d$ konvexně nezávislých vektorů?

Příklad třetí **Dvě konvexní vlastnosti:**

- Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n} \in \mathbb{R}^d$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tak potom i libovolná konvexní kombinace bodů splňuje ta samá omezení, čili $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ platí, že:

$$\vec{a_i}^T \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x_j} \right) \leq b_i.$$

- Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n} \in \mathbb{R}^d$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1,\ 2, \ldots, n\}$, tak potom ty samé body splňují i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ platí, že:

$$\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \vec{a_k} \right)^T \cdot \vec{x_j} \leq \sum_{k=1}^n \beta_k b_k.$$

Příklad čtvrtý Dokažte následující tvrzení. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathrm{Aff}(M) + u = \mathrm{Aff}(M + u)$ a $\mathrm{conv}(M) + u = \mathrm{conv}(M + u)$.

Příklad pátý Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad šestý Máte mnohostěn $P \in \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů:

$$\begin{aligned} a &= (\ \ 2,\ \ 1,\ \ 6) \\ b &= (\ \ 0, -5,\ \ 0) \\ c &= (-2,\ \ 2, -1) \\ d &= (\ \ 0, -4,\ \ 0) \\ e &= (\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1) \end{aligned}$$

Pro každou následující nadrovinu určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná a pro tečné nadroviny určete dimenzi příslušné stěny.

a) $5x + 3y - 2z = 1$
b) $x + y - z = 2$
c) $3x + 1z = 0$

Příklad sedmý

a) Ověřte, že d-dimenzionální simplex může být vyjádřen také jako průnik $d+1$ poloprostorů. Jinými slovy, najděte nerovnice, které určují nějaký d-dimenzionální simplex.
b) Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.
c) Určete, kolik stěn dimenze k má d-dimenzionální simplex.