

6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Úloha LP v rovnicovém tvaru: $\max c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení $Ax = b$, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení x je přípustné, tedy $x \geq 0$.

PŘÍKLAD PRVNÍ Společně vyřešíme následující úlohu LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\ x_1 & \leq 4 \\ -x_1 + x_2 & \geq -3 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Převedte LP do rovnicového tvaru s nezápornými proměnnými:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 & \leq 3 \\ x_2 + x_3 & \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 & \geq -7 \\ x_1, x_2, x_3 & \in \mathbb{R} \\ x_4 & \geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte také nějaké bázické přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.

Máme-li libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými, kolik nejvýše může mít rovnicový tvar této úlohy proměnných?

PŘÍKLAD TŘETÍ Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 & \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 5 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme zadaný následující problém:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ x_1 - x_5 + x_6 & = 20 \\ x_1 + x_3 + x_7 & = 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 & = 10 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 & = 1 \\ x_1, x_2, \dots, x_9 & \geq 0 \end{aligned}$$

a počáteční bazické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

PŘÍKLAD PÁTÝ Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP:

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max & 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, \dots, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$