9. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda znovu, lépe a radostněji

Úloha LP v rovnicovém tvaru: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \ldots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení $Ax = b$, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení x je přípustné, tedy $x \geq 0$.

Příklad první Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP).

$$\begin{aligned} \max 4x_2 - x_4 & \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad třetí Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, \ldots, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad čtvrtý Mějme zadaný následující problém:

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & \\ x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\ x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_9 &\geq 0 \end{aligned}$$

a počáteční bazické řešení $(0,0,0,0,0,20,30,10,1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

Příklad pátý Vyřešte simplexovou metodou:

$$\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\
& x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\
& x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\
& x_7 = 1 - x_1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Poté spočítejte stejnou úlohu pomocí pravidla „největší koeficient“.

Příklad šestý Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Proč se algoritmus zastavil? Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$\begin{array}{lcccc}
x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
-x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
x_1, x_2 \geq 0. & & & &
\end{array}$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P:

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &\geq 20 \\
5x + 6y + 5z &\leq 50 \\
x + 3y + 5z &\leq 30 \\
x, y, z &\geq 0
\end{aligned}$$

Příklad sedmý Najděte všechny vrcholy s optimálním řešením následujícího LP:

$$\begin{aligned}
\max 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 & \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 3 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 &\geq 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$