11. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volnost* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*). Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

Příklad první

Franta uhodl řešení $x = (6, 2, 0)$ následujícího LP:

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

Příklad druhý Optimální řešení duální úlohy k následující úloze je $(0; 7; 5,5; 0)$. Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru.

$$
\begin{aligned}
\max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\
5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\
2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_3 &\leq 4 \\
x_1, \ldots, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Příklad třetí Pro LP a jeho duál z předchozího příkladu nalezněte dvojici nenulových vektorů x a y takovou, že platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \tag{2}$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

Příklad čtvrtý Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.

../1314/12-mwpm-1.pdf

Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální.

Příklad pátý (Pro fajnšmekry) Dokažte aproximační verzi komplementarity: Nechť (x, y) jsou přípustná řešení primáru a duálu (LP jsou ve stejném tvaru jako u klasické věty o komplementaritě), která splňují:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i > 0 \quad \vee \quad c_i/\alpha \leq \sum_j a_{ij} y_j \leq c_i$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon y_j > 0 \quad \vee \quad b_j \leq \sum_i a_{ij} x_i \leq \beta b_j$$

Potom platí $c^T x \leq \alpha\beta c^T x^*$, kde x^* je optimální řešení primáru (jinak řečeno, x je $\alpha\beta$-aproximací optima).

Hint: Odhadněte $c^T x$ pomocí nerovnic z předpokladů.